M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 14

Ove Edlund

LTU

2016-09-15

Definition: Egenvektor, egenvärde

En **egenvektor** till en $n \times n$-matris, är en vektor $\mathbf{x}$ skilld från nollvektorn, som uppfyller

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$$

för någon skalär λ. Denna skalär λ kallas för ett **egenvärde** till matrisen.

Definition: Samma sak igen

Om man vänder på steken, kan man uttrycka sig såhär: En skalär λ är ett **egenvärde** till matrisen $\mathbf{A}$ om det finns en icketrivial lösning $\mathbf{x}$ till

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}.$$

En sådan lösning $\mathbf{x}$ kallas för en **egenvektor** som hör till egenvärdet λ.

Egenvektor, egenvärde, egenrum

Egenvärden och **egenvektorer** till en $n \times n$-matris $\mathbf{A}$ kan undersökas med det homogena linjära ekvationssystemet

$$(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Skalären λ är ett **egenvärde** om och endast om systemet har icketrivial lösning.

Givet ett egenvärde λ, är varje icketrivial lösning $\mathbf{x}$ en **egenvektor** som hör till λ.

Mängden av alla egenvektorer som hör till egenvärdet λ, tillsammans med nollvektorn $\mathbf{0}$, bildar ett underrum till $\mathbb{R}^n$ och benämns därför **egenrummet**. Egenrummet som hör till egenvärdet λ ges följdaktligen av $\mathrm{Nul}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})$.

Triangulära matriser

En **övertriangulär matris** är en kvadratisk matris med nollor under huvuddiagonalen. Markeringen $\times$ nedan betyder "godtyckligt tal".

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

En **undertriangulär matris** är en kvadratisk matris med nollor ovanför huvuddiagonalen.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

Sats 1

Om $\mathbf{A}$ är en triangulär matris, så ges egenvärdena av diagonalelementen.

Sats 2

Om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ är egenvektorer som svarar mot var sitt *unikt* egenvärde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ till en kvadratisk matris $\mathbf{A}$,
så är mängden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ linjärt oberoende.