M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 15

Ove Edlund

LTU

2016-09-19

Sats: Inverterbarhet

Låt $\mathbf{A}$ vara en $n \times n$-matris. Då är de följande påståendena ekvivalenta, dvs om ett är sant så är alla sanna.

a. $\mathbf{A}$ är inverterbar.
b. $\mathbf{A}$ är radekvivalent med $\mathbf{I}_n$.
c. $\mathbf{A}$ har n pivåpositioner.
d. Den homogena ekvationen $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har endast den triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
e. Kolonnerna i $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende.
f. Avbildningen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ är *ett-till-ett* (one-to-one).
g. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning för varje $\mathbf{b}$.
h. Kolonnerna i $\mathbf{A}$ spänner upp $\mathbb{R}^n$.
i. Avbildningen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ är *på* (onto).
j. Det finns en matris $\mathbf{C}$ så att $\mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.
k. Det finns en matris $\mathbf{D}$ så att $\mathbf{A}\mathbf{D} = \mathbf{I}_n$.
l. $\mathbf{A}^T$ är inverterbar.

Sats: Inverterbarhet, forts

Låt $\mathbf{A}$ vara en $n \times n$-matris. Då utökar vi listan med de följande ekvivalenta påståendena:

m. Kolonnerna i $\mathbf{A}$ bildar bas för $\mathbb{R}^n$.

n. $\mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$.

o. $\dim(\mathrm{Col}(\mathbf{A})) = n$.

p. $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = n$.

q. $\mathrm{Nul}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$.

r. $\dim(\mathrm{Nul}(\mathbf{A})) = 0$.

s. Talet 0 är **inte** ett egenvärde till $\mathbf{A}$.

t. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Sats 3: Determinanter (repetition)

Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara $n \times n$-matriser.

a. $\mathbf{A}$ är inverterbar $\Leftrightarrow$ $\det \mathbf{A} \neq 0$.

b. $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$.

c. $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$.

d. Om $\mathbf{A}$ är triangulär, så är $\det \mathbf{A}$ produkten av elementen på diagonalen.

e. i. Om matrisen $\mathbf{B}$ bildas genom att ta en multipel av en rad i $\mathbf{A}$ och lägga till en annan, så gäller

$$\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}).$$

ii. Om $\mathbf{B}$ bildas genom att byta plats på två rader i $\mathbf{A}$, så gäller

$$\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A}).$$

iii. Om $\mathbf{B}$ bildas genom multiplicera en rad i $\mathbf{A}$ med k, så gäller

$$\det(\mathbf{B}) = k \det(\mathbf{A}).$$

Utveckling efter rad och kolonn (rep. M0030M)

Låt

$$\mathbf{C}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})$$

beteckna **kofaktorn** för rad i och kolonn j till matrisen $\mathbf{A}$. Då gäller enligt definitionen av determinant

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}\,\mathbf{C}_{11} + a_{12}\,\mathbf{C}_{12} + \cdots + a_{1n}\,\mathbf{C}_{1n}.$$

Detta är utvecklingen efter rad 1. Man kan dock utveckla efter en godtycklig rad eller kolonn

Sats

Utveckling efter rad i: $\det(\mathbf{A}) = a_{i1}\,\mathbf{C}_{i1} + a_{i2}\,\mathbf{C}_{i2} + \cdots + a_{in}\,\mathbf{C}_{in}$

Utveckling efter kolonn j: $\det(\mathbf{A}) = a_{1j}\,\mathbf{C}_{1j} + a_{2j}\,\mathbf{C}_{2j} + \cdots + a_{nj}\,\mathbf{C}_{nj}$

Karakteristisk ekvation

En skalär λ är ett egenvärde till $n \times n$-matrisen $\mathbf{A}$ *om och endast om* λ uppfyller den **karakteristiska ekvationen**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = 0.$$

Man kan visa att att $\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})$ bildar ett n-tegradspolynom i λ. Detta polynom kallas det **karakteristiska polynomet**. Egenvärdena ges av nollställena till detta polynom.

Nollställenas **multiplicitet** blir också multipliciteten för egenvärdena.

Similaritet

Om $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ båda är $n \times n$-matriser, så är $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ **similära** om det finns en inverterbar $n \times n$-matris $\mathbf{P}$ så att

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}.$$

Sats 4

Om $n \times n$-matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är similära, **så** har de samma karakteristiska polynom, dvs de har samma egenvärden.