M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 16

Ove Edlund

LTU

2016-09-20

Diagonalmatris

En **diagonalmatris** är en matris vars element skiljer sig från noll endast på huvuddiagonalen. Exempel på diagonalmatriser:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{allmänt} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

Observera att

$$\mathbf{D}^k = \begin{bmatrix} d_{11}^k & & & \\ & d_{22}^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{nn}^k \end{bmatrix}$$

Diagonaliserbarhet

En matris $\mathbf{A}$ sägs vara **diagonaliserbar** om den är similär med någon diagonalmatris, dvs om det finns en inverterbar matris $\mathbf{P}$ så att $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$ för någon diagonalmatris $\mathbf{D}$.

Sats 5: Diagonalisering

En $n \times n$-matris $\mathbf{A}$ är diagonaliserbar *om och endast om* $\mathbf{A}$ har n st. linjärt oberoende egenvektorer.

Matrisen $\mathbf{P}$ bildas då med n-st linjärt oberoende egenvektorer som kolonner, och $\mathbf{D}$ bildas av egenvärdena som diagonalelement, på så sätt att egenvärdet för egenvektorn i varje kolonn i $\mathbf{P}$ hamnar på diagonalen i motsvarande kolonn i $\mathbf{D}$.

Sats 6

Om en $n \times n$-matris har n st. unika egenvärden så är matrisen diagonaliserbar.

Sats 7

Låt $\mathbf{A}$ vara en $n \times n$-matris med p st. unika egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.

a. Dimensionen hos egenrummet för λ_k är *mindre än eller lika med* multipliciteten för λ_k.

b. Matrisen $\mathbf{A}$ är diagonaliserbar *om och endast om* summan av egenrummens dimensioner är lika med n.

   Detta inträffar endast om dimensionerna för alla egenrum är *lika med* multipliciteten för motsvarande egenvärden.

c. Om $\mathbf{A}$ är diagonaliserbar, bildar basvektorerna för samtliga egenrum, tillsammans en bas för $\mathbb{R}^n$.