M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 17

Ove Edlund

LTU

2016-09-21

Matrisen för linjär avbildning

Låt $T : V \longrightarrow W$ vara en linjär avbildning, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ vara en bas för V, och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m\}$ vara en bas för W.
Då ges avbildningsmatrisen M för koordinatvektorer i respektive bas, motsvarande avbildningen T, av

$$M = \left[\, [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \; [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{C}} \; \ldots \; [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}} \;\right],$$

dvs

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} = M[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}},$$

Avbildning från V till V

Om avbildningen är från V med bas $\mathcal{B}$, till V med bas $\mathcal{B}$, så betecknas matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$, dvs

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[\, [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} \; [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} \; \ldots \; [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}} \;\right],$$

och

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}.$$

Matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ kallas $\mathcal{B}$-**matris**.

Egenvektorbaser i $\mathbb{R}^n$

Om man låter n st. linjärt oberoende egenvektorer till en avbildningsmatris vara en bas i $\mathbb{R}^n$, så blir avbildningsmatrisen i egenvektorbasen en diagonalmatris med egenvärden på diagonalen.

Sats 8

Antag att $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, där $\mathbf{D}$ är en diagonal $n \times n$-matris. Om $\mathcal{B}$ är den bas för $\mathbb{R}^n$ som bildas av kolonnerna i $\mathbf{P}$, så är $\mathbf{D}$ den $\mathcal{B}$-matris som motsvarar avbildningen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$.