M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 18

Ove Edlund

LTU

2016-09-22

Skalärprodukt, inre produkt

Om vi har två vektorer

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

så ges **skalärprodukten** eller **inre produkten** av

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Sats 1

Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$, och c vara en skalär. Då gäller

a. $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$

b. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{w} + \mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$

c. $(c\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) = \mathbf{u} \bullet (c\mathbf{v})$

d. $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} \geq 0$, och $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

OBS! Satsen ger att

$$(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_p\mathbf{u}_p) \bullet \mathbf{w} = c_1\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{w} + c_2\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{w} + \cdots + c_p\mathbf{u}_p \bullet \mathbf{w}$$

Längd, norm

Längden (eller **normen**) av en vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ är den ickenegativa skalär $\|\mathbf{v}\|$ som definieras av

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

För alla skalärer c gäller att $\|c\mathbf{v}\| = |c|\|\mathbf{v}\|$.

En **enhetsvektor** är en vektor vars längd (norm) är 1. Givet en vektor $\mathbf{v}$ får vi en enhetsvektor som pekar i samma riktning som $\mathbf{v}$ genom att **normera** den, dvs bilda

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}.$$

Avstånd

Avståndet mellan vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ skrivs $\mathrm{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, och definieras som längden (normen) av $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, dvs

$$\mathrm{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Ortogonala vektorer

Två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ är **ortogonala** om

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0.$$

Sats 2: Pythagoras sats

Två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala *om och endast om*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Ortogonala komplementet

Om en vektor $\mathbf{z}$ är ortogonal mot *varje vektor* i ett underrum W, i $\mathbb{R}^n$, så säger vi att $\mathbf{z}$ är ortogonal mot W.

Mängden av alla vektorer $\mathbf{z}$ som är ortogonala mot W kallas **ortogonala komplementet** till W, och betecknas $W^\perp$.

1. En vektor $\mathbf{x}$ tillhör $W^\perp$ *om och endast om* $\mathbf{x}$ är ortogonal mot varje vektor i en mängd som spänner upp W.
2. $W^\perp$ är ett underrum till $\mathbb{R}^n$.

Sats 3

Om $\mathbf{A}$ är en $m \times n$-matris, så är

$$(\mathrm{Row}(\mathbf{A}))^\perp = \mathrm{Nul}(\mathbf{A})$$

och

$$(\mathrm{Col}(\mathbf{A}))^\perp = \mathrm{Nul}(\mathbf{A}^T).$$

Ortogonala mängder

En mängd vektorer $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ är en **ortogonal mängd** om varje vektor i mängden är ortogonal mot alla andra, dvs $\mathbf{u}_i \bullet \mathbf{u}_j = 0$ då $i \neq j$.

Sats 4

Om $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ är en ortogonal mängd av vektorer skilda från nollvektorn $\mathbf{0}$, *så* är S linjärt oberoende och därmed en bas för $\mathrm{Span}(S)$.

Ortogonala baser

En **ortogonal bas** för ett underrum W, är en bas för W som också är en ortogonal mängd.

Sats 5

Låt $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$ vara en ortogonal bas för W. För varje vektor $\mathbf{y} \in W$ gäller då

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_p\mathbf{u}_p$$

där vikterna $c_1, c_2, \dots, c_p$ ges av

$$c_i = \frac{\mathbf{y} \bullet \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \bullet \mathbf{u}_i}.$$

Ortogonal projektion

Ortogonala projektionen av $\mathbf{y}$ på $\mathbf{u}$ ges av

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \bullet \mathbf{u}}{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}}\mathbf{u}$$

Komposanten av $\mathbf{y}$ som är ortogonal mot $\mathbf{u}$ ges av

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \frac{\mathbf{y} \bullet \mathbf{u}}{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}}\mathbf{u}$$

Ortonormerade mängder

En mängd vektorer $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ är en **ortonormerad mängd** om det är en ortogonal mängd av enhetsvektorer.

Om mängden är en bas för ett underrum W säger vi att det är en **ortonormerad bas** för W.

Sats 6

En $m \times n$-matris $\mathbf{U}$ har ortonormerade kolonner *om och endast om* $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$.

Sats 7

Om $\mathbf{U}$ är en $m \times n$-matris med ortonormerade kolonner, och $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, så är

a. $\|\mathbf{U}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$

b. $(\mathbf{U}\mathbf{x}) \bullet (\mathbf{U}\mathbf{y}) = \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$

c. $(\mathbf{U}\mathbf{x}) \bullet (\mathbf{U}\mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = 0$