M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 19

Ove Edlund

LTU

2016-09-23

Ortogonal projektion

Sats 8

Låt W vara ett underrum till $\mathbb{R}^n$. Då kan varje $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ entydigt uttryckas av

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$$

där $\hat{\mathbf{y}} \in W$ och $\mathbf{z} \in W^{\perp}$.

Om $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ är en ortogonal bas för W, uttrycks dessa vektorer av

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \bullet \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y} \bullet \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \cdots + \frac{\mathbf{y} \bullet \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \bullet \mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p$$

och

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}.$$

Vektorn $\hat{\mathbf{y}}$ ovan kallas för den **ortogonala projektionen av $\mathbf{y}$ på** W, och betecknas

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{y}).$$

Sats 9

Låt W vara ett underrum till $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ och $\hat{\mathbf{y}} = \mathrm{proj}_W(\mathbf{y})$. Då är $\hat{\mathbf{y}}$ den punkt i W som är närmast $\mathbf{y}$, i avseendet att

$$\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| < \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|$$

för alla $\mathbf{v} \in W$ som är skilda från $\hat{\mathbf{y}}$.

Dvs $\hat{\mathbf{y}}$ är den vektor i W som är den bästa approximationen av $\mathbf{y}$.

Sats 10

Om $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ är en **ortonormerad** bas för W, så är

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{y}) = (\mathbf{y} \bullet \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{y} \bullet \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{y} \bullet \mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p.$$

Om vi bildar matrisen $\mathbf{U} = [\,\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \ldots\ \mathbf{u}_p\,]$, kan detta uttryckas enligt

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{y}) = \mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{y}.$$

ON-matriser, ortogonala matriser

Om $\mathbf{U}$ är en $n \times n$-matris vars kolonner bildar en ortonormerad bas, så är $\mathrm{Col}(\mathbf{U}) = \mathbb{R}^n$. Av sats 10 följer, att för alla $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gäller

$$\mathbf{y} = \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{y}) = \mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{y} = \mathbf{I}\,\mathbf{y},$$

dvs

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}.$$

Enligt sats 6 gäller också

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}.$$

Slutsats:

$$\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$$

om $\mathbf{U}$ är en kvadratisk matris med ortonormerade kolonner.

En sådan matris kallas för en **ON-matris** eller **ortogonal matris**.