M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

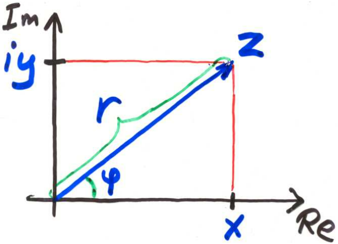
Föreläsning 2

Ove Edlund

LTU

2016-08-30

Polära koordinater



Komplexa tal kan beskrivas med polära koordinater, vilket innebär att z beskrivs av **avståndet från origo** r och **vinkeln mot reella axeln** φ som uttrycks med $\arg z$.

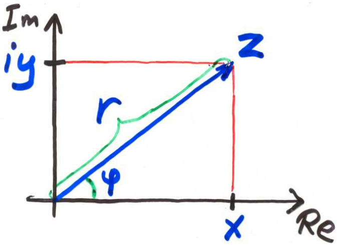
Förhållandet mellan rektangulära koordinater och polära koordinater beskrivs av uttrycken:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arg z \end{cases}$$

det ger

$$z = x + i\,y = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \;\; (= r\,e^{i\,\varphi})$$

Polär form



Att uttrycka komplexa tal med polära koordinater enligt

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ (= r\,e^{i\,\varphi})$$

kallas **polär form**.
Likhet mellan två komplexa tal z_1 och z_2 i polär form ges av

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + k\,2\,\pi, \ \ k \text{ heltal} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg z_1 = \arg z_2 + k\,2\,\pi, \ \ k \text{ heltal} \end{cases}$$

Satser för polär form

Sats 9.8

Låt $z_1 \neq 0$ och $z_2 \neq 0$ vara komplexa tal. Då gäller

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

Sats 9.9: deMoivres formel

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

då n är heltal.

Andragradsekvationer

Lösningsidé

1. Kvadratkomplettera
2. Ersätt kvadraten med en ny variabel
3. Identifiera realdel och imaginärdel (leder till reell andragradsekvation)
4. Återför lösningen till de ursprungliga variablerna.