M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 20

Ove Edlund

LTU

2016-09-26

Grahm-Schmidt-ortogonalisering

Sats 11

Givet en bas $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ för ett underrum W till $\mathbb{R}^n$, låt

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{x}_1 \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3 \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_3 \bullet \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{v}_p &= \mathbf{x}_p - \frac{\mathbf{x}_p \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_p \bullet \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\mathbf{x}_p \bullet \mathbf{v}_{p-1}}{\mathbf{v}_{p-1} \bullet \mathbf{v}_{p-1}}\mathbf{v}_{p-1}
\end{aligned}$$

Då är $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ en **ortogonal** bas för W.

Ortonormerad bas

Vi kan naturligtvis lätt skapa en ortonormerad bas, efter Grahm-Schmidt-ortogonaliseringen, genom att normera basen.

QR-faktorisering

Sats 12

Om $\mathbf{A}$ är en $m \times n$-matris med linjärt oberoende kolonner, så kan $\mathbf{A}$ faktoriseras enligt

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\,\mathbf{R}$$

där $\mathbf{Q}$ är en $m \times n$-matris vars kolonner är en ortonormerad bas för $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$, och $\mathbf{R}$ är en övertriangulär $n \times n$-matris.