M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 21

Ove Edlund

LTU

2016-09-26

Minstakvadratproblemet

Om $\mathbf{A}$ är en $m \times n$-matris och $\mathbf{b}$ är en vektor i $\mathbb{R}^m$, så är **minstakvadratlösningen** till $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en vektor $\hat{\mathbf{x}}$ i $\mathbb{R}^n$ så att

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x}\|$$

för alla $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$.

Sats 13

Mängden av minstakvadratlösningar till $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sammanfaller med den icke tomma mängden av lösningar till normalekvationen

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}.$$

Sats 14

Matrisen $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ är inverterbar om och endast om kolonnerna i $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende.

Om så är fallet har minstakvadratproblemet $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ endast en lösning $\hat{\mathbf{x}}$, som ges av

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}.$$

Sats 15

Om $\mathbf{A}$ är en $m \times n$-matris med linjärt oberoende kolonner, och $\mathbf{A}$ har QR-faktorisering $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\,\mathbf{R}$, så har ekvationen $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ minstakvadrat-lösning

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}.$$

Lösningen bestäms lämpligtvis genom att lösa det övertriangulära systemet $\mathbf{R}\,\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$ med bakåtsubstitution.