M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 22

Ove Edlund

LTU

2016-09-27

Definition: inre produkt, inreproduktrum

En **inre produkt** i ett vektorrum V. är en funktion som givet två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i V, ger tillbaka ett reellt tal $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, och som dessutom uppfyller följande räknelagar:

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
3. $\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0, \quad$ och $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Ett vektorrum med inre produkt, kallas för ett **inreproduktrum**.

Kända begrepp i ny tappning

I ett inreproduktrum V definieras **längden** eller **normen** av en vektor av

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Uppenbarligen gäller då också att

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

En **enhetsvektor** är en vektor vars längd/norm är 1.

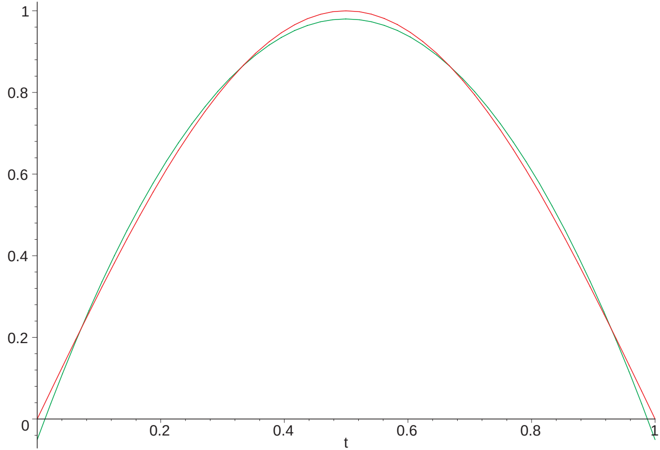
Avståndet mellan två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är **ortogonala** om

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

— $\sin \pi t$ — $\frac{2}{\pi} + 60\frac{\pi^2-12}{\pi^3}(t^2 - t + \frac{1}{6})$



Sats 16: Cauchy-Schwarz olikhet

För alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ gäller

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

Sats 17: Triangelolikheten

För alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ gäller

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$