# M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

## Föreläsning 23

Ove Edlund

LTU

2016-09-29

# Symmetriska matriser

En symmetrisk matris är en matris vars element ovanför diagonalen är en spegelvänd upplaga av elementen under diagonalen. Detta innebär att $\mathbf{A}$ är symmetrisk om och endast om

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T.$$

Exempel på symmetriska matriser

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

## Sats 1

Om $\mathbf{A}$ är symmetrisk, så är två egenvektorer som hör till olika egenvärden, dvs är hämtade från olika egenrum, alltid ortogonala.

# Ortogonalt diagonaliserbara matriser

En matris $\mathbf{A}$ sägs vara **ortogonalt diagonaliserbar** om det finns en ortogonal matris (ON-matris) $\mathbf{P}$ och en diagonalmatris $\mathbf{D}$ så att

$$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^T.$$

Eftersom $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ för ortogonala matriser innebär det

$$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^T = \mathbf{PDP}^{-1}.$$

**Sats 2**

En $n \times n$-matris är ortogonalt diagonaliserbar *om och endast om* $\mathbf{A}$ är symmetrisk.

## Sats 3: Spektralsatsen

En symmetrisk $n \times n$-matris $\mathbf{A}$ har följande egenskaper:

a. $\mathbf{A}$ har $n$ reella egenvärden, om man räknar dem med multiplicitet.
b. Dimensionen hos egenrummet för varje egenvärde $\lambda$ är samma som multipliciteten hos $\lambda$.
c. Egenrummen är ortogonala mot varandra, i den meningen att två egenvektorer från olika egenrum är ortogonala.
d. $\mathbf{A}$ är ortogonalt diagonaliserbar.