M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 24

Ove Edlund

LTU

2016-09-29

Kvadratiska former

En **kvadratisk form** i $\mathbb{R}^n$ är en funktion $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ som kan beräknas av ett uttryck på formen

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\, \mathbf{x},$$

där $\mathbf{A}$ är en symmetrisk $n \times n$-matris. Exempel:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= x_1^2 - 6x_1x_2 + 10x_2^2 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

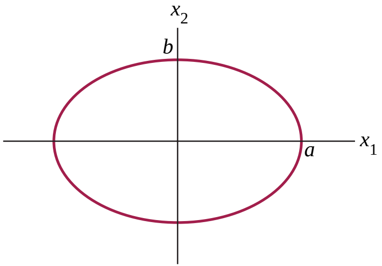
$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= -3x_1^2 + 8x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 8 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Uppenbarligen hamnar koefficienter för kvadrater på diagonalen, medan koefficienter för blandade produkter halveras och placeras symmetriskt på båda sidor av diagonalen.

Sats 4

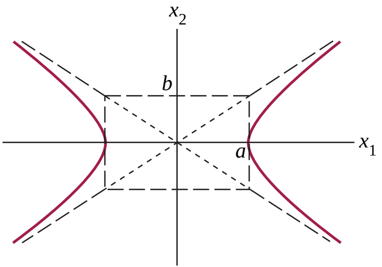
Låt $\mathbf{A}$ vara en symmetrisk $n \times n$-matris. Då finns en ortogonal matris $\mathbf{P}$ som genom variabelbytet $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ omvandlar den kvadratiska formen $\mathbf{x}^T \mathbf{A}\, \mathbf{x}$ till en kvadratisk form $\mathbf{y}^T \mathbf{D}\, \mathbf{y}$, där $\mathbf{D}$ är en diagonalmatris, dvs det finns inga blandade produkter.

Ellips och hyperbel i "standardposition"



$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

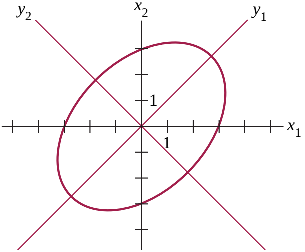
$$a > 0, b > 0$$



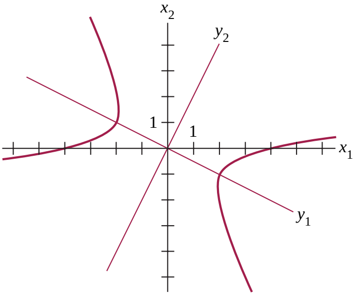
$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

$$a > 0, b > 0$$

Ellips och hyperbel ej i "standardposition"

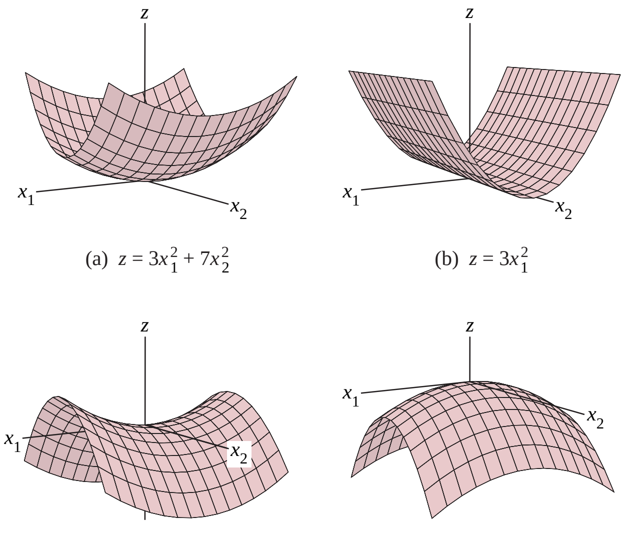


(a) $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 48$



(b) $x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2 = 16$

Grafer av kvadratiska former



(a) $z = 3x_1^2 + 7x_2^2$ (b) $z = 3x_1^2$

(c) $z = 3x_1^2 - 7x_2^2$ (d) $z = -3x_1^2 - 7x_2^2$

Definition

En kvadratisk form är

a. **positivt definit** om $Q(\mathbf{x}) > 0$ för alla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
b. **negativt definit** om $Q(\mathbf{x}) < 0$ för alla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
c. **indefinit** om $Q(\mathbf{x})$ antar både positiva och negativa värden.

Om $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ för alla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, säger vi att Q är **positivt semidefinit**.

Om $Q(\mathbf{x}) \leq 0$ för alla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, säger vi att Q är **negativt semidefinit**.

Sats 5

Låt $\mathbf{A}$ vara en symmetrisk $n \times n$-matris. Då är den kvadratiska formen $\mathbf{x}^T \mathbf{A}\, \mathbf{x}$:

a. positivt definit om och endast om alla egenvärden till $\mathbf{A}$ är positiva.
b. negativt definit om och endast om alla egenvärden till $\mathbf{A}$ är negativa.
c. indefinit om och endast om $\mathbf{A}$ både har positiva och negativa egenvärden.

Optimering med bivillkor

Låt m vara det minsta möjliga värdet för $\mathbf{x}^T \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ då $\|\mathbf{x}\| = 1$, dvs

$$m = \min\{\mathbf{x}^T \mathbf{A}\,\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

och M vara det största möjliga värdet för $\mathbf{x}^T \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ då $\|\mathbf{x}\| = 1$, dvs

$$M = \max\{\mathbf{x}^T \mathbf{A}\,\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

då gäller

Sats 6

Låt $\mathbf{A}$ vara en symmetrisk matris, och låt m och M vara definerade enligt ovan. Då är M det största egenvärdet, och m det minsta egenvärdet till $\mathbf{A}$.
Värdet av $\mathbf{x}^T \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ är M då $\mathbf{x}$ är en enhets-egenvektor till $\lambda = M$.
Värdet av $\mathbf{x}^T \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ är m då $\mathbf{x}$ är en enhets-egenvektor till $\lambda = m$.