LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

Diagnostiskt test 2; M0031M

1. Låt
$$A = \begin{bmatrix} -14 & 8 \\ -12 & 14 \end{bmatrix}.$$
Diagonalisera A, d.v.s. finn matriser P och D, där D är en diagonalmatris, så att $A = PDP^{-1}$. Bestäm A^{11}. (5 p)

2. Låt $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ definierad via
$$T(p(t)) = (t+1)p'(t) + (t-1)p(t) + p(2).$$
   a) Visa att T är linjär.
   b) Bestäm matrisen för T relativt baserna $\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\}$ och $\mathcal{B}_2 = \{1, t, t^2, t^3\}$. Kontrollera svaret med polynomet $q(t) = 1 - t^2$, d.v.s. verifiera att
$$q(t) \mapsto T(q(t)) \mapsto [T(q(t))]_{\mathcal{B}_2}$$
   ger samma svar som
$$q(t) \mapsto [q(t)]_{B_1} \mapsto M\,[q(t)]_{B_1},$$
   där M är den nyss bestämda matrisen. (5 p)

3. Utrusta $\mathbb{P}_1$ med skalärprodukten
$$\langle p(t), q(t)\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + 2p(1)q(1).$$
   a) Låt $u(t) = 2 + t$ och $v(t) = 1 - 8t$. Bestäm $\langle u(t), v(t)\rangle$, $\|u\|$ och $\operatorname{dist}(u, v)$.
   b) Bestäm en ortogonal bas för $\mathbb{P}_1$. (5 p)

4. Utrusta $\mathbb{P}_4$ med skalärprodukten

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt.$$

Bestäm den bästa approximationen för $u(t) = t^4$ med polynom ur $\mathbb{P}_3$. (5 p)

5. Betrakta följande data

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
y	1	2	1	-1

. Bestäm den funktion på formen $y = A\sin(x) + B\cos(2x)$ som bäst anpassar till datapunkterna i minsta kvadratmetodens mening. (5 p)

6. Låt

$$Q(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 2xy + 4xz - 4yz.$$

Bestäm det största resp. minsta värde $Q(x, y, z)$ kan ha då $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Ge exempel på punkter (x, y, z) där det största resp. minsta värdet antas. (5 p)