M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 26

Ove Edlund

LTU

2016-10-04

Differentialekvationer

Ekvationer som innefattar en funktion $y(x)$ och dess derivator $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$, ... kallas **differentialekvationer**.
Differentialekvationens **ordning** ges av den högsta derivata som finns i ekvationen. Ex:

$$y''' + y = x$$

är en **tredje** ordningens differentialekvation.

Den **allmänna lösningen**

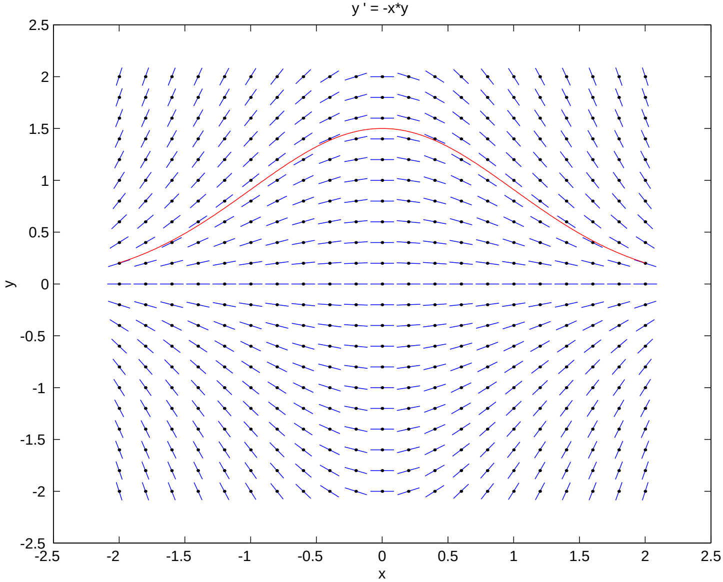
$$y = x + A\,e^{-x} + e^{x/2}\left(B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

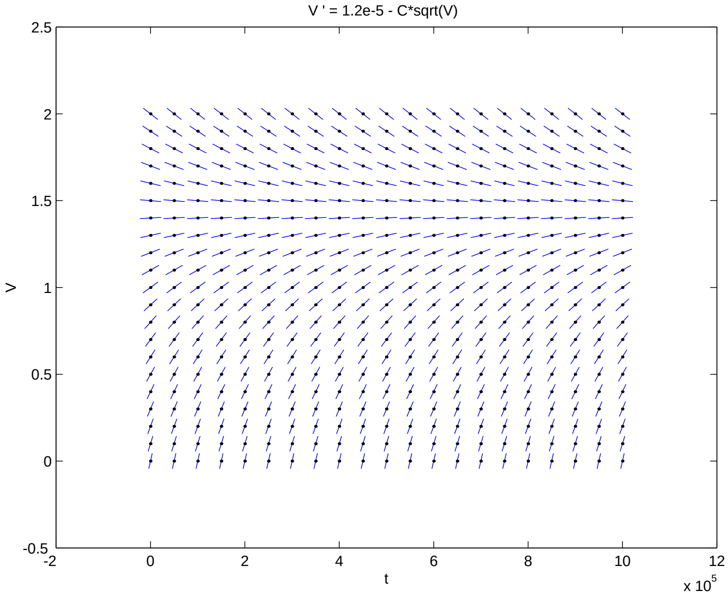
beskriver **alla** lösningar.

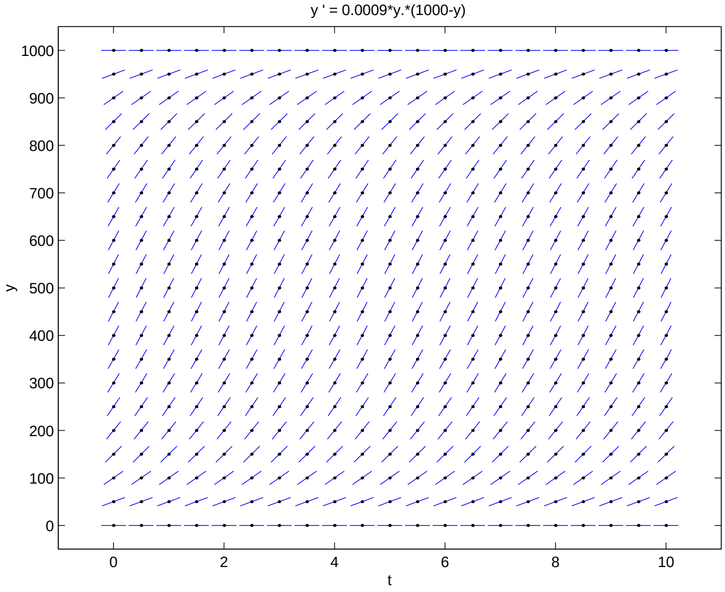
Genom att ge konstanterna bestämda värden, ex: $A = 0$, $B = 1$ och $C = 0$ fås en **partikulärlösning**:

$$y = x + e^{x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Riktningsfält för $\quad y'(x) = -x\,y(x)$




V ' = 1.2e-5 - C*sqrt(V)
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
V
-2
0
2
4
6
8
10
12
t
x 10^5

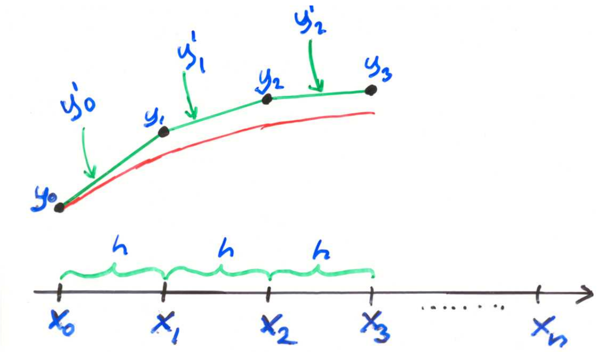

y ' = 0.0009*y.*(1000-y)
y
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
t
0
2
4
6
8
10

Eulers metod

Första ordningens differentialekvationer som går att skriva på formen

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad \text{dvs} \quad y' = f(x, y)$$

kan lösas *approximativt* med **Eulers metod**:



Eulers metod, forts

Eftersom $y' = f(x, y)$, så approximerar vi

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) \\
y_2 &= y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) \\
y_3 &= y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) \\
&\vdots \\
y_n &= y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})
\end{aligned}
$$

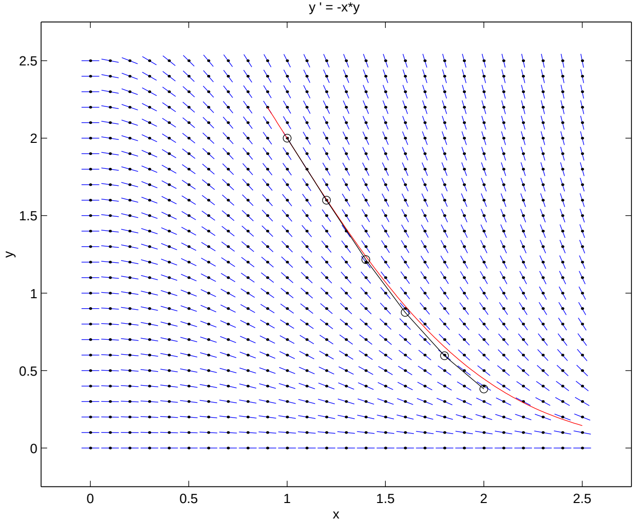
där $x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2\,h, \quad \ldots \quad x_n = x_0 + n\,h$

och $y_k = \tilde{y}(x_k)$ är ett närmevärde till den exakta lösningen $y(x_k)$.

Exempel, Eulers metod

$y'(x) = -x\,y(x)$ dvs $f(x,y) = -x\,y$

Begynnelsevärde $y(1) = 2$ och steglängd $h = 0.2$



Linjära differentialekvationer

Differentialekvationer är linjära om de kan skrivas på formen

$$g_n\, y^{(n)} + \cdots + g_3\, y''' + g_2\, y'' + g_1\, y' + g_0\, y = h$$

där g_k och h är funktioner av x, och $y^{(k)}$ är derivatan av ordning k av $y(x)$.

- Om g_k är konstanter så säger vi att differentialekvationen har **konstanta koefficienter**.
- Om $h(x) = 0$ för alla x, är differentialekvationen **homogen**.

Superpositionsprincipen

Sats 10.1

Om y_1 och y_2 är lösningar till en **homogen** och **linjär** differentialekvation, så är också

$$y = y_1 + y_2$$

och

$$y = c \cdot y_1$$

lösningar till differentialekvationen. c är en godtycklig konstant.

Det innebär att också

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$$

är en lösning, för godtyckliga konstanter c_1 och c_2.