M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 29

Ove Edlund

LTU

2016-10-07

Linjäriserbara första ordningens ekvationer

Tes 2.4.1

Ekvationen av ordning ett

$$\frac{df(y)}{dy}\frac{dy}{dx} + f(y)P(x) = Q(x)$$

där $f(y)$ är en godtycklig deriverbar funktion av y och P och Q är kontinuerliga funktioner av x på någon definitionsmängd $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, kan linjäriseras till

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

med substitionen

$$v(x) = f(y(x))$$

Bernoulli-equationen

Ett viktigt specialfall av ekvationen i Tes 2.4.1 är **Bernoulli-ekvationen**

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y + g(x)y^n, \qquad n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

där $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga funktioner.

Tes 2.4.2

Bernoulli-ekvationen kan linjäriseras för alla $n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ genom att uttrycka ekvationen med $v(x)$ genom substitutionen

$$v(x) = y^{1-n}(x)$$

Riccati-equationen

Riccati-ekvationen har formen

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$$

där $f(x)$, $g(x)$ och $h(x)$ är kontinuerliga funktioner.

Riccati-equationen, forts

Tes 2.4.3

Riccati-equationen

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$$

kan linjäriseras till följande första ordningens ekvation

$$\frac{dv}{dx} + [2\phi(x)f(x) + g(x)]v = -f(x) \tag{1}$$

med variabelbytet

$$y(x) = \phi(x) + \frac{1}{v(x)}$$

där ϕ är någon partikulärlösning till Riccati-ekvationen och v är allmän lösning till ekvation (1).

Riccati-equationen, forts

Tes 2.4.4

Riccati-equationen
$$\frac{dy}{dx} = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$$
med allmän lösning på formen
$$y(x;c) = \phi(x) + \frac{1}{v(x;c)}$$
där $v(x;c)$ är allmän lösning till den linjära ekvationen
$$\frac{dv}{dx} + [2\phi(x)f(x) + g(x)]v = -f(x)$$
och $\phi(x)$ är en partikulärlösning till Riccati-ekvationen. Då är
$$y(x) = \phi(x)$$
en singulär lösning för begynnelsevillkoret $y(x_0) = \phi(x_0)$ för varje x_0 i lösningsfunktionens definitionsmängd. Begynnelsevärdesproblemets lösning ges då av den singulära lösningen, $y(x) = \phi(x)$.