M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 3

Ove Edlund

LTU

2016-09-01

Andragradsekvationer

Lösningsidé

1. Kvadratkomplettera
2. Ersätt kvadraten med en ny variabel
3. Identifiera realdel och imaginärdel (leder till reell andragradsekvation)
4. Återför lösningen till de ursprungliga variablerna.

Algebraiska ekvationer

Ett polynom P med gradtal n uttrycks som

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

Där alla a_k är komplexa tal, och $a_n \neq 0$.

Ekvationen $P(z) = 0$ kallas den **algebraiska ekvationen**.

Lösningarna kallas **nollställen** till $P(z)$, eller **rötter** till $P(z) = 0$.

Polynomdivision

Division mellan polynomen f och g, (f delat med g), ger en **kvot** q och en **rest** r. Förhållandet mellan dem utrycks

$$f = q\,g + r$$

där gradtalet för r är lägre än för g.
Man kan också skriva

$$\frac{f}{g} = q + \frac{r}{g}$$

Man säger att f är **delbar** med g om $r = 0$. Det innebär att

$$f = q\,g$$

Om f är **delbar** med g gäller alltså

$$\frac{f}{g} = q$$

Faktorsatsen

Sats 9.10: Faktorsatsen

Talet z_0 är nollställe till P om och endast om P är delbart med $z - z_0$.

Om polynomet P är delbart med $(z - z_0)^m$, men inte med $(z - z_0)^{m+1}$, så har nollstället z_0 **multiplicitet** m.

Algebrans fundamentalsats

Sats 9.11: Algebrans fundamentalsats

Varje polynom med gradtal ≥ 1 har minst ett (komplexvärt) nollställe.

Sats 9.12

Varje polynom med gradtal n har precis n st. nollställen, om dessa räknas med multiplicitet.

Polynom med reella koefficienter

Sats 9.13

Givet att polynomet

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

har **reella** koefficienter a_k, så gäller

1. **Om** z_0 är ett nollställe,
   så är också $\bar{z}_0$ ett nollställe.
   (z_0 och $\bar{z}_0$ bildar ett komplexkonjugerat nollställespar)
2. z_0 och $\bar{z}_0$ har samma multiplicitet.

Sats 9.14

Poynom med reella koefficienter kan skrivas som en produkt av första- och andragradspolynom med reella koefficienter.