M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 30

Ove Edlund

LTU

2016-10-10

Metod, tillämpade problem

1. Rita figur
2. Identifiera matematiska/fysikaliska storheter
3. Formulera samband mellan storheterna
4. Formulera differentialekvationen
5. Finn allmän lösning, och partikulärlösning till problemets villkor
6. Tolka resultatet

Differentialekvationer: Homogena, linjära, av ordning 2, med konstanta koefficienter

Differentialekvationer på formen

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0$$

löses genom att finna rötterna till den **karakteristiska ekvationen**

$$r^2 + a\,r + b = 0.$$

- Om det finns **reella rötter** $r_1 \neq r_2$ så är allmänna lösningen
$$y = A\,e^{r_1\,x} + B\,e^{r_2\,x}.$$
- En **dubbelrot** $r = r_1 = r_2$ ger
$$y = (A\,x + B)\,e^{r\,x}.$$
- **Komplexa rötter** $r = \alpha \pm i\,\beta$ ger
$$y = e^{\alpha\,x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x).$$

Sats 10.2

Varje linjär homogen differentialekvation av ordning 2

$$y'' + g_1\, y' + g_0\, y = 0 \tag{1}$$

där $g_1(x)$ och $g_0(x)$ är kontinuerliga funktioner på ett öppet intervall I, har två linjärt oberoende lösningar på intervallet I.

Om y_1 och y_2 är två linjärt oberoende lösningar till (1) så kan den allmänna lösningen skrivas

$$y = A\, y_1 + B\, y_2$$

där A och B är konstanter.

Variation av konstanterna 1

Om

$$y'' + g_1\, y' + g_0\, y = 0$$

has lösning y_1, så kan den andra linjärt oberoende lösningen plockas fram genom att ansätta

$$y_2 = z\, y_1 \ .$$

Funktionen $z(x)$ erhålls genom att sätta in y_2 i differentialekvationen, och lösa den första ordningens differentialekvation som då uppkommer.