M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 31

Ove Edlund

LTU

2016-10-11

Inhomogena differentialekvationer

Sats 10.4

Om y_p är någon lösning (en partikulärlösning) till ekvationen

$$y'' + p\,y' + q\,y = h(x) \tag{1}$$

och y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0$$

så är

$$y = y_h + y_p$$

den allmänna lösningen till (1).

Partikulärlösning för olika högerled

Givet en inhomogen differentialekvation

$$y'' + p\,y' + q\,y = h(x)$$

finner vi en partikulärlösning y_p som ger högerledet genom kvalificerade gissningar, eller "ansatser". Olika högerled kräver olika ansatser.

Polynom

Om $h(x)$ är ett polynom av gradtal n, ansätter vi att y_p är ett godtyckligt polynom av samma gradtal, dvs n.

Om t.ex. $h(x)$ är ett polynom av gradtal 3, är en lämplig ansats

$$y_p = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$$

där koefficienterna a, b, c och d bestäms, genom sätta in y_p i differentialekvationen, och identifiera koefficienterna, så att likheten uppfylls.

Obs! Om $q = 0$ i differentialekvationen, ökas gradtalet med ett i ansatsen, ex $y_p = x(a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d)$.

Partikulärlösning för olika högerled

Polynom gånger exponentialfunktion

Om $h(x)$ är ett polynom av gradtal n, gånger en exponentialfunktion, dvs

$$h(x) = Q_n(x)\, e^{s\,x}$$

ansätter vi att y_p är ett godtyckligt polynom av samma gradtal, gånger samma exponentialfunktion

$$y_p = P_n(x)\, e^{s\,x}$$

Obs! Om $e^{s\,x}$ är en term i homogenlösningen, måste ansatsen modifieras till $y_p = x\,P_n(x)\, e^{s\,x}$.

Obs Obs! Om $x\,e^{s\,x}$ är en term i homogenlösningen, måste ansatsen modifieras till $y_p = x^2\,P_n(x)\, e^{s\,x}$.

Partikulärlösning för olika högerled

Polynom gånger exponentialfunktion, alternativ metod

Om $h(x)$ är ett polynom av gradtal n, gånger en exponentialfunktion, dvs

$$h(x) = Q_n(x)\, e^{s\,x}$$

ansätter vi att y_p är en godtycklig funktion $z(x)$, gånger samma exponentialfunktion

$$y_p = z(x)\, e^{s\,x}$$

Detta ger efter insättning i differentialekvationen, en ny inhomogen differentialekvation i z, där högerledet är ett polynom, ur vilken z kan bestämmas.

Partikulärlösning för olika högerled

Flera termer i högerledet

Om högerledet består av flera termer

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x) + \cdots + h_n(x)$$

bestämmer vi en partikulärlösning till en term i taget genom att lösa

$$y_k'' + a\,y_k' + b\,y_k = h_k(x)$$

för $k = 1 \ldots n$. Partikulärlösningen y_p hörande till $h(x)$ får vi genom att summera alla y_k, dvs

$$y_p = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

Partikulärlösning för olika högerled

sinus och cosinus

Om $h(x)$ är sinus och/eller cosinus, dvs

$$h(x) = k \sin(\alpha x) \quad \text{eller} \quad h(x) = k \cos(\alpha x) \quad \text{eller}$$

$$h(x) = k_1 \sin(\alpha x) + k_2 \cos(\alpha x)$$

ansätter vi att y_p är en godtycklig linjärkombination av $\sin(\alpha x)$ och $\cos(\alpha x)$

$$y_p = a \sin(\alpha x) + b \cos(\alpha x)$$

där koefficienterna a och b bestäms, genom sätta in y_p i differentialekvationen, och identifiera koefficienterna, så att likheten uppfylls.

Obs! Om $\sin(\alpha x)$ och $\cos(\alpha x)$ är termer i homogenlösningen, måste ansatsen modifieras till $y_p = x\,\big(a \sin(\alpha x) + b \cos(\alpha x)\big)$.

Partikulärlösning för olika högerled

exponentialfunktion gånger sinus/cosinus

Om $h(x)$ är

$$h_1(x) = k\, e^{\alpha\, x} \cos(\beta\, x) \quad \text{eller} \quad h_2(x) = k\, e^{\alpha\, x} \sin(\beta\, x)$$

lös differentialekvationen

$$u'' + a\, u' + b\, u = k\, e^{(\alpha + i\, \beta)\, x}$$

för komplexvärd lösning u_p som ger högerledet. Partikulärlösning till $h_1(x) = k\, e^{\alpha\, x} \cos(\beta\, x)$ ges då av

$$y_p = \mathrm{Re}(u_p)$$

och till $h_2(x) = k\, e^{\alpha\, x} \sin(\beta\, x)$ ges av

$$y_p = \mathrm{Im}(u_p)$$