M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 33

Ove Edlund

LTU

2016-10-13

Wronskianen

Beteckningen $\mathcal{C}^n(\mathcal{D})$ betyder mängden av funktioner som är n gånger deriverbara på definitionsmängden $\mathcal{D}$.

Definition 1.1.4

Givet mängden av funktioner

$$S = \{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)\} \text{ i } \mathcal{C}^n(\mathcal{D})$$

så definieras **Wronskianen** av determinanten

$$W[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n](x) := \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \dots & \phi_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)} & \phi_2^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

där $W[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n](x)$ är deriverbar på $\mathcal{D}$.

Tes 1.1.2

Låt $S = \{\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)\}$ vara en mängd med n nollskilda funktioner i $\mathcal{C}^n(\mathcal{D})$.
Om S är linjärt beroende, så är Wronskianen $W[\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n](x) = 0$ för alla $x \in \mathcal{D}$.
Så om $W[\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n](x_0) \neq 0$ för någon punkt $x_0 \in \mathcal{D}$, så är S en linjärt oberoende mängd.

Tes 1.1.3

Låt $S = \{\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)\}$ vara en mängd med n nollskilda lösningar till

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

på något intervall $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$. Då är antingen

$$W[\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n](x) = 0$$

för alla $x \in \mathcal{D}$, eller

$$W[\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n](x) \neq 0$$

för alla $x \in \mathcal{D}$.

Tes 3.3.2

Antag att två linjärt oberoende lösningar till

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = 0$$

ges av $\phi_1(x)$ och $\phi_2(x)$ på intervallet $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$. Då ges en partikulärlösning till

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = f(x)$$

av

$$y_p(x) = w_1(x)\phi_1(x) + w_2(x)\phi_2(x)$$

där $w_1(x)$ och $w_2(x)$ har följande form

$$w_1(x) = -\int \frac{f(x)\phi_2(x)}{W[\phi_1, \phi_2](x)} dx, \quad w_2(x) = \int \frac{f(x)\phi_1(x)}{W[\phi_1, \phi_2](x)} dx.$$

Ovan är $W[\phi_1, \phi_2](x)$ Wronskianen.

Variation av konstanterna 2 (Derivator integraler och sånt)

Vi finner en partikulärlösning till

$$y'' + g_1\, y' + g_0\, y = r$$

där g_1, g_0 och r är funktioner av x, genom att ta två linjärt oberoende lösningar y_1 och y_2 till motsvarande homogena differentialekvation

$$y'' + g_1\, y' + g_0\, y = 0\ .$$

Vi ansätter

$$y_p = v_1\, y_1 + v_2\, y_2$$

och bestämmer funktionerna v_1 och v_2 genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} v_1'\, y_1 + v_2'\, y_2 = 0 \\ v_1'\, y_1' + v_2'\, y_2' = r \end{cases}$$

m.a.p. v_1' och v_2', och ta primitiv funktion.

Variation av konstanterna 2

Dvs givet två homogenlösningar y_1 och y_2 kan partikulärlösningen uttryckas genom att lösa ovanstående system, vilket ger:

$$y_p = y_1 \underbrace{\int \frac{-r\, y_2}{y_1\, y_2' - y_2\, y_1'}\, dx}_{v_1} + y_2 \underbrace{\int \frac{r\, y_1}{y_1\, y_2' - y_2\, y_1'}\, dx}_{v_2}$$