M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 34

Ove Edlund

LTU

2016-10-17

Homogenlösning till Eulers differentialekvation

Eulers differentialekvation av ordning 2 har följande utseende:

$$x^2\,y'' + a\,x\,y' + b\,y = 0, \quad \text{då} \quad x > 0$$

Ansatsen $y = x^\alpha$ ger "karakteristisk ekvation":

$$\alpha^2 + (a-1)\alpha + b = 0\ .$$

- Två **reella rötter** $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ger

$$y = A\,x^{\alpha_1} + B\,x^{\alpha_2}.$$

- En **dubbelrot** $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ ger

$$y = (A\,\ln x + B)\,x^\alpha.$$

- **Komplexa rötter** $\alpha = \beta \pm i\,\gamma$ ger

$$y = x^\beta\,(A\cos(\gamma\ln x) + B\sin(\gamma\ln x)).$$

Eulers differentialekvation: Alternativ lösningsmetod

Variabelbytet $x = e^t$, dvs $t = \ln x$ ger

$$z(t) = y(x) = y(e^t)$$

$$\Updownarrow$$

$$y(x) = z(t) = z(\ln x)$$

Derivering m.a.p. t ger

$$x\,y'(x) = z'(t)$$

och

$$x^2\,y''(x) = z''(t) - z'(t)$$

Insatt i Eulers differentialekvation (ickehomogen variant)

$$x^2\,y'' + a\,x\,y' + b\,y = r, \quad \text{då} \quad x > 0$$

ger en linjär differentialekvation med konstanta koefficienter, uttryckt i z.