M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 35

Ove Edlund

LTU

2016-10-18

Linjära differentialekvationer av högre ordning

Sats 10.5

Varje linjär homogen differentialekvation av ordning n har n st. linjärt oberoende lösningar.

Om y_1, y_2,..., y_n är n st. linjärt oberoende lösningar så kan varje lösning till ekvationen skrivas som

$$y = A_1\, y_1 + A_2\, y_2 + \cdots + A_n\, y_n$$

där A_1, A_2,..., A_n är konstanter.

Differentialekvationer: Homogena, linjära, med konstanta koefficienter

Differentialekvation

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

har karakteristiska ekvation

$$r^n + a_{n-1}\, r^{n-1} + \cdots + a_1\, r + a_0 = 0.$$

Låt r_0 vara en rot.

- r_0 reell med multiplicitet 1 ger lösningen: $e^{r_0\, x}$
- r_0 reell med multiplicitet m_0 ger: $e^{r_0\, x}$, $x\, e^{r_0\, x}$, $x^2\, e^{r_0\, x}$,..., $x^{m_0-1} e^{r_0\, x}$
- $r_0 = \alpha \pm i\,\beta$ med multiplicitet 1 ger: $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$
- $r_0 = \alpha \pm i\,\beta$ med multiplicitet m_0 ger:
  $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $x\, e^{\alpha x} \cos \beta x$,..., $x^{m_0-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$
  $e^{\alpha x} \sin \beta x$, $x\, e^{\alpha x} \sin \beta x$,..., $x^{m_0-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$

Sammantaget får vi n st. linj. ober. lösningar som sätts samman enligt Sats 10.5.