M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

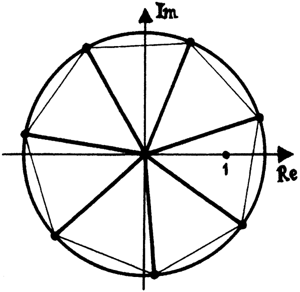
Föreläsning 4

Ove Edlund

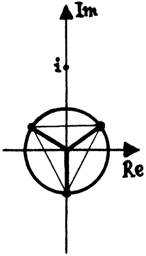
LTU

2016-09-01

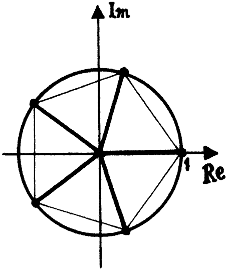
Ekvationen $z^n = w$



$z^7 = -3(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i\,3(\sqrt{6} + \sqrt{2})$



$z^3 = i\,\dfrac{1}{8}$



$z^5 = 1$

Lösningar till ekvationen $z^n = 1$ kallas **enhetsrötter**.

Funktionen e^z

Vi börjar med en rent imaginär exponent $z = i\,y$. Definition:

$$e^{i\,y} = \cos y + i\,\sin y$$

Med hjälp av detta kan den polära formen skrivas på ett mer kompakt sätt

$$z = r\,e^{i\,\varphi}$$

där $r = |z|$ och $\varphi = \arg z$.

Vi får en elegantare notation för **deMoivres formel:**

$$\left(e^{i\,y}\right)^n = e^{i\,n\,y}$$

Eulers formler

Sats 9.15: Eulers formler

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\,\theta} - e^{-i\,\theta}\right)$$

Funktionen e^z

Då z är komplex gör vi, definitionen:

$$e^z = e^{x+i\,y} = e^x\,(\cos y + i\,\sin y)$$

Observera att $e^x = r = |e^z|$ och $y = \varphi = \arg(e^z)$.

Sats 9.16

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\,e^{z_2}$$

Sats 9.17

$$\frac{d}{dx}\,e^{\gamma x} = \gamma\,e^{\gamma x}$$

där $\gamma \in \mathbb{C}$ och $x \in \mathbb{R}$.