M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 7

Ove Edlund

LTU

2016-09-07

Definition: vektorrum

Ett **vektorrum** V är en icke-tom mängd av **vektorer** vilka man kan **addera** och **multiplicera** med en skalär enligt reglerna nedan. För vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, och skalärerna $c, d \in \mathbb{R}$ ska gälla:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
4. Det finns en **nollvektor** $\mathbf{0}$ så att $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
5. För alla $\mathbf{u} \in V$ existerar en vektor $-\mathbf{u}$ så att $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
6. $c\,\mathbf{u} \in V$
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\,\mathbf{u} + c\,\mathbf{v}$
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\,\mathbf{u} + d\,\mathbf{u}$
9. $(c\,d)\mathbf{u} = c(d\,\mathbf{u})$
10. $1\,\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Definition: underrum

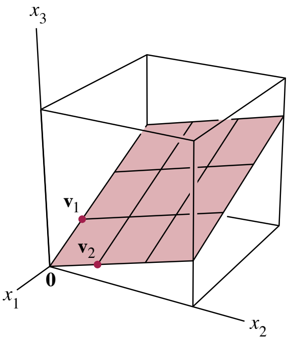
Ett **underrum** H till ett vektorrum V är en delmängd av V som har egenskaperna:

1. Nollvektorn i V finns också i H.
2. H är **sluten** under vektoraddition, dvs $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \;\Rightarrow\; \mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$.
3. H är **sluten** under multiplikation med skalär, dvs $\mathbf{u} \in H, c \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; c\,\mathbf{u} \in H$.

OBS! Ett underrum är också ett vektorrum.

Exempel

Ett underrum som spänns upp av två vektorer:



Sats 1

Om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_p$ är i vektorrummet V
så är $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_p\}$ ett underrum till V.

Linjära höljet (repetition)

Definition

Om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ alla tillhör $\mathbb{R}^n$, så benämns mängden av alla linjärkombinationer av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ för det **linjära höljet** av vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ med beteckning

$$\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}.$$

Dvs det linjära höljet är de vektorer som kan uttryckas med

$$c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\,\mathbf{v}_p.$$

för **alla** val av $c_1, c_2, \ldots, c_p$.

Observera att $\mathbf{0}$ alltid ingår i det linjära höljet.