M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 9

Ove Edlund

LTU

2016-09-08

Linjärt (o)beroende (rep M0030M)

En uppsättning vektorer är linjärt beroende om någon av dem kan beskrivas som en linjärkombination av de andra. Detta formuleras enligt:

Definition: Linjärt beroende

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ är **linjärt beroende** om det existerar värden $x_1, x_2, \ldots, x_p$ som inte alla är noll, så att

$$x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\,\mathbf{v}_p = \mathbf{0}.$$

Om det ovanstående inte gäller, dvs

$$x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\,\mathbf{v}_p = \mathbf{0}.$$

endast är uppfyllt om alla $x_1, x_2, \ldots, x_p$ är noll, säger vi att vektorerna är **linjärt oberoende**.

Linjärt (o)beroende, forts (rep M0030M)

Enligt definitionen av matris-vektor-multiplikation kan villkoret omformuleras enligt

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_p \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

dvs ett homogent ekvationssystem $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Om endast den triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ existerar är kolonnerna linjärt oberoende,

annars är de linjärt beroende.

Bas

Sats 4

En mängd $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ av minst två vektorer, där $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, är linjärt beroende **om och endast om** något $\mathbf{v}_j$ kan uttryckas som en linjärkombination av de föregående vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{j-1}$.

Definition: Bas

Om H är ett underrum till V, så är vektormängden $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_p\}$ i V en **bas** för H om

(i) $\mathcal{B}$ är en linjärt oberoende mängd, och

(ii) underrummet som spänns upp av $\mathcal{B}$ är hela H, dvs

$$H = \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_p\}.$$

Bas, forts

Sats 5

Låt $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ där $\mathbf{v}_i \in V$, och låt $H = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$.

a. Om $\mathbf{v}_k$ kan uttryckas som en linjärkombination av de övriga elementen i S, så kan $\mathbf{v}_k$ tas bort ur S, utan att $\mathrm{Span}(S)$ påverkas.

b. Om $H \neq \{\mathbf{0}\}$, så finns en delmängd av S som är bas för H.

Sats 6

Pivåkolonnerna i matrisen $\mathbf{A}$ bildar en bas för $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$.