Exempel 1: Kul koordinatbytesmatris

Vi vet att

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \\
\cos x &= \cos x \\
\cos^2 x &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2x \\
\cos^3 x &= (\cos x)(\cos^2 x) = \tfrac{1}{2}\cos x + \tfrac{1}{2}(\cos x)(\cos 2x) \\
&= \tfrac{1}{2}\cos x + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) \\
&= \tfrac{3}{4}\cos x + \tfrac{1}{4}\cos 3x \\
\cos^4 x &= (\cos^2 x)^2 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{4}\cos^2 2x \\
&= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x) \\
&= \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{8}\cos 4x \\
\cos^5 x &= \ldots = \tfrac{5}{8}\cos x + \tfrac{5}{16}\cos 3x + \tfrac{1}{16}\cos 5x \\
\cos^6 x &= \ldots = \tfrac{5}{16} + \tfrac{15}{32}\cos 2x + \tfrac{3}{16}\cos 4x + \tfrac{1}{32}\cos 6x
\end{aligned}
$$

Låt nu

$$\mathcal{B} = \{1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x, \cos^4 x, \cos^5 x, \cos^6 x\}$$

och

$$\mathcal{C} = \{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x, \cos 5x, \cos 6x\}$$

vara två olika baser för vektorrummet V. Då bildas koordinatbytesmatrisen $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ genom att ta elementen i basen $\mathcal{B}$ och undersöka deras koordinatvektorer i basen $\mathcal{C}$ i tabellen ovan. Dessa koordinatvektorer bildar sedan kolonnerna i matrisen:

$$
\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{16} \\
0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{5}{8} & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{15}{32} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{16} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{16} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{32}
\end{bmatrix}
$$

Detta innebär exempelvis att funktionen

$$f(x) = 4\cos^3 x - \cos^6 x$$

i V, kan uttryckas som koordinatvektor i basen $\mathcal{B}$, $[f]_{\mathcal{B}} = [0, 0, 0, 4, 0, 0, -1]^T$. Koordinatbytesmatrisen ger då koordinatvektorn för samma funktion i basen $\mathcal{C}$, genom $[f]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[f]_{\mathcal{B}} = [-\frac{5}{16}, 3, -\frac{15}{32}, 1, -\frac{3}{16}, 0, -\frac{1}{32}]^T$. Detta innebär att samma funktion uttryckt i basen $\mathcal{C}$ är

$$f(x) = -\tfrac{5}{16} + 3\cos x - \tfrac{15}{32}\cos 2x + \cos 3x - \tfrac{3}{16}\cos 4x - \tfrac{1}{32}\cos 6x\ .$$

Exempel 2: Linjär avbildning från V till W uttryckt som en avbildningsmatris som avbildar koordinatvektorer i $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Resonemanget i exempel 1 ger att

$$\int 1\,dx = x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \tfrac{3}{4}\sin x + \tfrac{1}{12}\sin 3x + C$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \tfrac{3}{8}x + \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{1}{32}\sin 4x + C$$

$$\int \cos^5 x\,dx = \tfrac{5}{8}\sin x + \tfrac{5}{48}\sin 3x + \tfrac{1}{80}\sin 5x + C$$

$$\int \cos^6 x\,dx = \tfrac{5}{16}x + \tfrac{15}{64}\sin 2x + \tfrac{3}{64}\sin 4x + \tfrac{1}{192}\sin 6x + C$$

Om vi alltid låter $C = 0$ är integreringen en linjär avbildning! Låt nu

$$\mathcal{B} = \{1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x, \cos^4 x, \cos^5 x, \cos^6 x\}$$

och

$$\mathcal{C} = \{x, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x, \sin 5x, \sin 6x\}$$

där $\mathcal{B}$ är en bas för vektorrummet V, och $\mathcal{C}$ är en bas för vektorrummet W. Vi bildar matrisen M genom att ta elementen i basen $\mathcal{B}$, avbilda dem och undersöka koordinatvektorerna i basen $\mathcal{C}$, för de avbildade vektorerna. Dessa koordinater bildar sedan kolonnerna i matrisen:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{15}{64} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{48} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{32} & 0 & \frac{3}{64} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{80} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{192} \end{bmatrix}$$

Detta innebär exempelvis att funktionen

$$f(x) = \sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 x - \cos^4 x$$

i V, kan uttryckas som koordinatvektor i basen $\mathcal{B}$, $[f]_{\mathcal{B}} = [0, 0, 1, 0, -1, 0, 0]^T$. Matrisen ger då koordinatvektorn för en primitiv funktion F i basen $\mathcal{C}$, genom $[F]_{\mathcal{C}} = M[f]_{\mathcal{B}} = [\frac{1}{8}, 0, 0, 0, -\frac{1}{32}, 0, 0]^T$. Detta innebär att en primitiv funktion till f uttryckt i basen $\mathcal{C}$ är

$$F(x) = \tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{32}\sin 4x\ .$$