M0038M Differentialkalkyl, Lekt 2, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Repetition Lekt 1

- Förenkla
$$\frac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}$$
så långt som möjligt.
- En rät linje går genom punkterna $(a,3)$, $(-2,b)$ och $(3,9)$ och har riktningskoefficient 2. Bestäm a och b.

Kvadratkomplettering

Utgående ifrån kvadreringsregeln

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

kan vi skriva

$$x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2$$

Vi genomför en s.k. kvadratkomplettering.

Exempel

Kvadratkomplettera $x^2 + 4x + 3$.

$$x^2 + 4x + 3 = (x + a)^2 + b \quad \text{(Kvadraten kompletteras)}$$

$$x^2 + \mathbf{4}x + 3 = x^2 + \mathbf{2a}x + a^2 + b \quad \text{(Leder till ett ekvationssystem)}$$

$$\begin{cases} 2a &= 4 \quad \text{(Koeff. för } x\text{)} \\ a^2 + b &= 3 \quad \text{(Konstanter)} \end{cases}$$

Vi har att $a = 2$, $b = 3 - a^2$=-1, dvs. $\underline{x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1}$.

Exempel

Kvadratkomplettera

- $x^2 - 3x + 2$
- $2x^2 + 2x - 1$

Ekvationer, forts.: Andragradskvationer

En godtycklig andragradsekvation skrivs på formen

$$x^2 + px + q = 0.$$

Den har lösningen

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (\text{"}p - q\text{-formeln"})$$

OBS Koefficient 1 framför x^2.

Exempel

Lös

- $x^2 - 6x + 8 = 0$
- $-2x^2 + 8x + 10 = 0$
- $\dfrac{7}{x-1} = 5 + \dfrac{4}{x}, \quad x \neq 0, 1$

Rotekvationer

Lös om möjligt ekvationen

$$\sqrt{2x^2 + x - 2} = x.$$

Kvadrering gör att ekvivalensen bryts! Vid ekvationer av denna typ *måste alltid lösningarna prövas*.

Analytisk geometri, forts.: Avståndsformeln

Avståndet d mellan två punkter med koordinaterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2) är

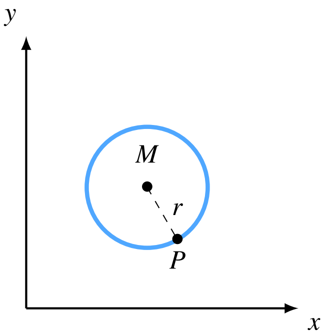
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exempel Bestäm de punkter (x, y) i planet som alla har avståndet 3 längdenheter till punkten $(-4, -2)$.

Kvadratiska ekvationer: Cirkeln

En cirkel med radie r är mängden av alla punkter $P : (x, y)$, vilkas avstånd till en given punkt $M : (a, b)$ (medelpunkt) är konstant:

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad \text{(Enl. avståndsformeln i planet)}$$



Andragradskurvor

Cirkeln hör till en funktionsfamilj, kallad andragradskurvorna. Dessa beskrivs generellt av ekvationen

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey - F = 0.$$

Med hjälp av kvadratkomplettering kan en andragradskurvas geometriska betydelse analyseras.

Exempel

Bestäm den geometriska betydelsen av andragradskurvan

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0.$$

Polynom och rationella funktioner

Definition Ett *polynom* är ett uttryck på formen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad ,$$

där n är ett naturligt tal och $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ är reella tal.

Nu skall vi använda polynomen i ett speciellt sammanhang.

Definition

En *rationell funktion* $r(x)$ definieras som en kvot av två polynom $p(x)$ och $q(x)$:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

där $q(x) \neq 0$.

Att analysera rationella funktioner hör till de vanligaste uppgifterna i en grundläggande kurs i matematik. Till det behövs en hel del verktyg. Vi skall titta litet närmare på ett av dem.

Polynomdivision

När man löser polynomekvationer av hög grad, finns det inga bestämda metoder, i stil med lösningen av en andragradsekvation. I sådana situationer använder man sig av en speciell metod, *polynomdivisionen*, för att i bästa fall kunna *faktoruppdela* polynomet. Vi ser på tekniken i ett exempel.

Exempel Polynomdividera

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 + 2x + 1}. \tag{1}$$

Lösningsförslag

Vi använder algoritmen för ”lång division”(här den s.k. *trappan*) på uttrycket (1).

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & & x & +\,1 \\ \hline
x^2+2x+1 & x^3 & +\,3x^2 & & -\,4 \\
 & -\,x^3 & -\,2x^2 & -\,x & \\ \hline
 & & x^2 & -\,x & -\,4 \\
 & & -\,x^2 & -\,2x & -\,1 \\ \hline
 & & & -\,3x & -\,5
\end{array}
$$

Ur exemplet drar vi följande lärdomar:

- **Praxis** Skriv polynomen med *fallande* gradtal.
- **Skalning** Multiplicera nämnaren med lämplig faktor. Efter förlängningen skall de ledande termerna överensstämma.
- **Eliminering** Subtrahera. Ledande term försvinner. Ger upphov till nytt polynom. Upprepa proceduren.

Polynomdivisionen gav följande resultat:

$$f(x) = \underbrace{x+1}_{\textit{kvot}} - \underbrace{\frac{3x+5}{x^2+2x+1}}_{\textit{rest}}$$

Vi sammanfattar:

Sats

För godtyckliga polynom $p(x)$ *och* $q(x)$ *existerar två andra polynom* $k(x)$ *och r(x) med följande egenskaper:*

- $\dfrac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}$
- *gradtalet hos* $r(x)$ *är mindre än gradtalet hos* $q(x)$
- *Om* $r(x) = 0$, *går divisionen jämnt ut, dvs.* $p(x) = k(x) \cdot q(x)$

Exempel

Bestäm alla (reella) rötter till ekvationen

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

Lösningsförslag

Genom s.k. *prövning* konstaterar vi att $x = 1$ är en rot. Det betyder att $p(x) = (x-1)\cdot q(x)$, dvs polynomet är delbart med $x-1$, enligt faktorsatsen. Vi utför denna polynomdivision.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 \quad + x - 6 \\
\hline
x-1 & x^3 \qquad\quad - 7x + 6 \\
 & -x^3 + x^2 \\
 & \quad x^2 - 7x \\
 & \quad -x^2 + x \\
 & \qquad -6x + 6 \\
 & \qquad 6x - 6 \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Med andra ord gäller

$$x^3 - 7x + 6 = (x - 1) \cdot (x^2 + x - 6).$$

Vi går vidare och löser den återstående andragradsekvationen (gör det som nyttig övning) och får rötterna $x = 2$ respektive $x = -3$. **Kontrollera detta**.

Olikheter

Ibland vill man veta vilka variabelvärden som uppfyller en föreskriven olikhet.
Metodiken liknar den man använder vid ekvationslösning.

- Man får addera/subtrahera samma tal till bägge leden i en olikhet utan att olikheten förändras,
- Man får multiplicera/dividera bägge leden i en olikhet med ett positivt tal utan att olikheten förändras,
- Då man multiplicerar/dividerar bägge leden i en olikhet med ett negativt tal, ändras olikhetstecknet.

Exempel

Lös

- $2x - 4 > 2$
- $-3x + 2 > -2$
- $x - 5 < 2x + 3$

Exempel

Lös

- $(x-1)(x+3) \leq 0$
- $x^2 > 3x + 10$
- $1 < 2x + 5 < 5$

Exempel

Lös olikheten

$$\frac{3}{x-1} < -\frac{2}{x}.$$

Lösningsförslag

Skriv om olikheten på gemensam nämnare:

$$\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x} < 0$$

$$\frac{5x-2}{x(x-1)} < 0.$$

Vi sätter $Q(x) = \dfrac{5x-2}{x(x-1)}$ och ställer upp ett teckenschema.

x		0		0.4		1	
x	-	0	+ +		+ + +	+	+
5x-2	-		- -	0	+ + +	+	+
x-1	-		- -		- - -	0	+
Q(x)	-	ej def	+ +	0	- - -	ej def	+

Vi avläser från teckenschemat att

$$\{x : -\infty < x < 0 \text{ eller } 2/5 < x < 1\}$$

Avslutande exempel

Lös olikheten

$$\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x}$$

Läs (och lös) på egen hand

Kvadratkomplettera $3x^2 - 9x + 6$.

Lösningsförslagsförslag (tjuvkika inte)

$$3x^2 - 9x + 6 = 3(x^2 - 3x + 2) \quad \text{(Alltid koeff. 1 framför } x^2\text{)}$$
$$x^2 - 3x + 2 = (x + a)^2 + b$$
$$x^2 - 3x + 2 = x^2 + 2ax + a^2 + b$$

$$\begin{cases} 2a &= -3 \quad (a = -3/2) \\ a^2 + b &= 2 \quad (b = 2 - a^2 = -1/4) \end{cases}$$

Svar: $3x^2 - 9x + 6 = 3\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = 3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$.

Läs och lös på egen hand

Lös följande olikhet

- $$\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+2}$$

Lösningsförslag(tjuvkika inte)

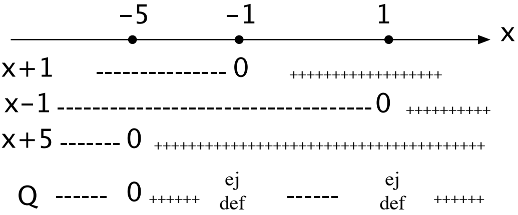
$$\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$$ Flytta över till VL

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} < 0$$

$$\frac{3(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} < 0$$ OBS! Teckenbyte

$$\frac{x+5}{(x-1)(x+1)} < 0$$ **OBS Mult. ej med** $(x-1)(x+1)$

Teckenstudium av $Q = \dfrac{x+5}{(x-1)(x+1)}$



Svar: Olikheten gäller för $x < -5$ eller $-1 < x < 1$.

Läs och lös på egen hand

- Avståndet mellan en punkt P och en linje L definieras som avståndet mellan P och den punkt på L som ligger närmast P. Bestäm avståndet mellan origo och linjen $y = 2x - 1$.

Lösningsförslag–tjuvkika inte

Välj punkten (x, y) godtyckligt på L. Med avståndsformeln:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = (y = 2x - 1) = \sqrt{x^2 + (2x - 1)^2} \quad .$$

Vi får att

$$d^2 = 5(x^2 - 4/5x + 1/5) \overset{\text{kvadratkompl.}}{=} 5((x - 2/5)^2 + 1/25).$$

d^2 (och därmed d) är som minst för $x = 2/5$. Punkten P har koordinaterna $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$. Sökta avståndet: $\sqrt{4/25 + 1/25} = 1/\sqrt{5}$.