M0038M Differentialkalkyl, Lekt 3, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Repetition Lekt 2

- Lös följande olikhet
$$\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x}$$
- Bestäm, *med hjälp av kvadratkomplettering*, det största värdet av
$$f(x) = 2x - 1 - 2x^2.$$

Intervall, forts

Under lektion 1 gjorde vi oss bekanta med intervallbegreppet. Nu skall vi knyta intervall samman med en speciell funktion, beloppsfunktionen.

$|x|$, en viktig styckevis definierad funktion

Den s.k. *beloppsfunktionen*, med beteckning $|x|$, tillhör utan tvekan en av de viktigaste funktionerna i den tillämpade matematiken.

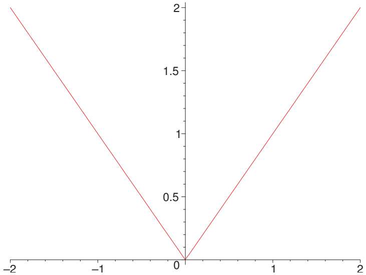
Beloppsfunktionen definieras enligt

$$|x| = \begin{cases} x & \text{för } x \geq 0 \\ -x & \text{för } x < 0 \end{cases}$$

Anmärkning

Lägg märke till att $-x > 0$ om $x < 0$, vilket kan verka konstigt, men är likväl självklart, eller hur?

Som konsekvens gäller att $|x| \geq 0$ för alla reella tal x.



Anmärkning 2 Vi noterar att $|x| = \sqrt{x^2}$

Exempel

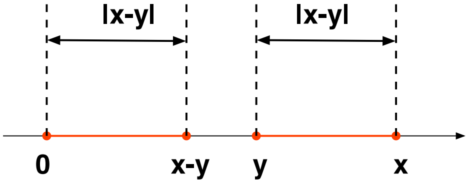
Beräkna

- $|3-4|$
- $|4-3|$
- $|3-(-4)|$

Geometrisk tolkning?

Avstånd

Avståndet mellan två punkter på tallinjen är ett positivt tal. Mer precist: Om x och y är två reella tal kan $|x - y|$ tolkas som avståndet mellan x och y.



Vi konstaterar ur definitionen:

$$|x-y| = \begin{cases} x-y & , \quad x-y \geq 0, \text{ dvs om } x \geq y \\ -(x-y) = y-x & , \quad x-y < 0, \text{ dvs om } x < y \end{cases}$$

Anm Avståndet mellan x och y beror ej på punkternas läge i förhållande till varandra.

Exempel

Lös olikheten

$$|x+9| < 7. \quad (\rightarrow)$$

Lösningsförslag

$$
\begin{aligned}
&|x+9| < 7 \\
&\Leftrightarrow \\
&-7 < x+9 < 7 \\
&\Leftrightarrow \\
&-16 < x < -2
\end{aligned}
$$

Anm Det gäller att hitta alla x på avståndet mindre än 7 från (fixa) punkten -9.

Att öva på egen hand

Skriv som en olikhet av typen $|x-a|<b$:

$$-2<x<5$$

Svar: $|x-3/2|<7/2$

Funktioner

Vi möter nog rätt så ofta i olika media uttrycket ”... som funktion av ...”. Dessa ord försöker beskriva ett beroende mellan två storheter. Exempelvis

- Framledningstemperaturen som funktion av utomhustemperaturen,
- Dragkraften som funktion av hastigheten,
- Hörtrösklar som funktion av ålder,
- Fotoelektronströmmen som funktion av spänningen.

Beroende/oberoende variabler

En funktion uttrycker som sagt ett förhållande mellan två kvantiteter. Litet mer precist kan vi uttrycka detta som

En funktion beskriver ett beroende mellan två variabler, den beroende variabeln och den oberoende variabeln.

Exempel

Nedanstående tabell anger bränsleförbrukningen hos en personbil som funktion av farten.

Fart (km/h)	Bränsleförbr. (l/mil)
50	0,58
70	0,60
90	0,70
110	0,88
130	1,15

Bränsleförbrukningen är den beroende variabeln. Farten är den oberoende variabeln.

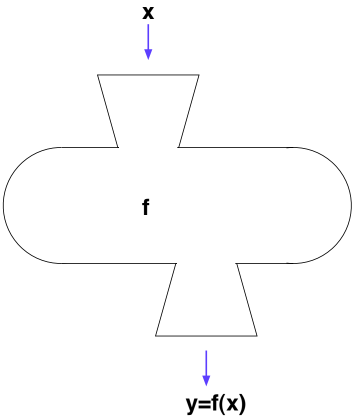
Beteckningen $y = f(x)$

Om variabeln y är en funktion av variabeln x, så finns det ett praktiskt sätt att beteckna denna relation. Låt oss kalla funktionen för f.
Följande uttryck är ekvivalenta:

- y är en funktion av x,
- $y = f(x)$.

Det sista uttrycket utläses "f-av-x" eller "f-x". Detta beteckningssätt härrör från 1700-talet och "uppfanns" av schweizaren Leonhard Euler (1707-1783).

En funktion f kan ses som en sorts ”maskin”, som för varje x som stoppas in i maskinen, levererar precis ett $y = f(x)$.



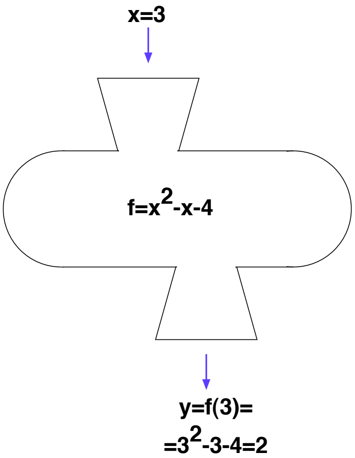
Att beräkna funktionsvärden

Beteckningssättet $y = f(x)$ visar sig vara mycket praktiskt. Vi exemplifierar: Om y är en funktion, som beror av x, och som ges av ekvationen $y = \frac{2}{3}x + 2$, skriver vi $y = f(x) = \frac{2}{3}x + 2$. Nu skall vi tillämpa detta, när vi beräknar funktionsvärden.

Exempel Antag att $f(x) = x^2 - x - 4$.
Beräkna $f(3)$. $(\rightarrow)$

Lösningsförslag

Vi använder oss av ”maskin”-modellen. Vi stoppar in $x = 3$ i maskinen.



Vad levererar maskinen?

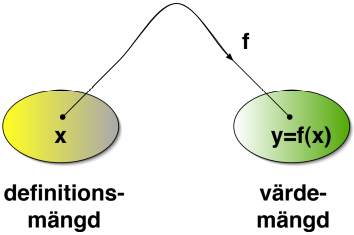
Exempel

- Sätt $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. Beräkna $f(1/x)$ och $f(1-x)$.

Definitionsmängd och värdemängd

Vi antar att y är en funktion av x.

De värden som x kan anta, kallas funktionens definitionsmängd, och de värden som y kan anta, kallas funktionens värdemängd.



Vi såg i exemplet att den oberoende variabeln, farten, varierar mellan 50 och 130 km/h. Detta intervall brukar kallas funktionens definitionsmängd. Enligt vår tabell varierar den beroende variabeln, bränsleförbrukningen, mellan 0,58 och 1,15 l/mil. Detta intervall brukar kallas funktionens värdemängd.
Låt oss bli litet mer formella.

Grundläggande definition

Vi antar att y är en funktion av x, dvs. y beror på något sätt av x. Vi skriver $y = f(x)$.

- x kallas oberoende variabel, medan y kallas beroende variabel.
- x antar värden i definitionsmängden D_f.
- y antar värden i värdemängden V_f.

Exempel

Från tidigare i lektionen erinrar vi oss:

Beloppsfunktionen definieras enligt

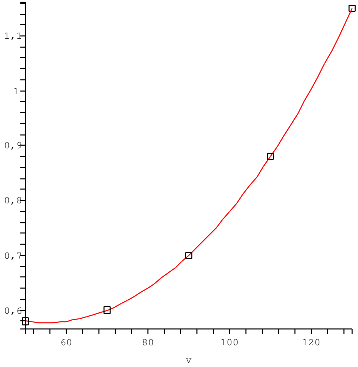
$$|x| = \begin{cases} x & \text{för } x \geq 0 \\ -x & \text{för } x < 0 \end{cases}$$

Dess definitionsmängd är $\mathbb{R}$, och dess värdemängd är $[0, \infty[$.

Graf

Vi återvänder till vårt inledande exempel och avsätter farten längs den vågräta axeln och bränsleförbrukningen längs den lodräta axeln i ett diagram eller koordinatsystem.
Det är rimligt att vi konstruerar en böjd kurva genom de fem punkterna.

Denna kurva kallas funktionens graf och visas i nedanstående diagram.

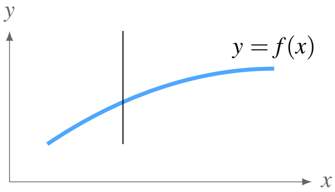


När representerar en graf en funktion?

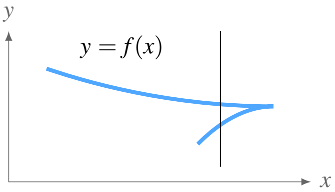
Vi såg i vårt tidigare exempel, att det till varje värde på farten bara fanns precis ett värde på bränsleförbrukningen. Detta krav kan vi uttrycka mer generellt:

Om det till varje värde på den oberoende variabeln finns precis ett värde på den beroende variabeln, säger vi att relationen representerar en funktion. Dess graf kallas en funktionskurva.

Vi kan illustrera definitionen grafiskt: Om det finns en lodrät linje som skär grafen i mer än en punkt, är grafen inte en funktionskurva.
Det får alltså inte finnas flera y-värden för ett specifikt x-värde.



(a) Funktionskurva



(b) Inte en funktionskurna

Tillåtna x-värden

Ofta lönar det sig att ställa frågan ”Vilka x är tillåtna?” när man arbetar med problem av följande typ:

Exempel Bestäm definitionsmängden till funktionen

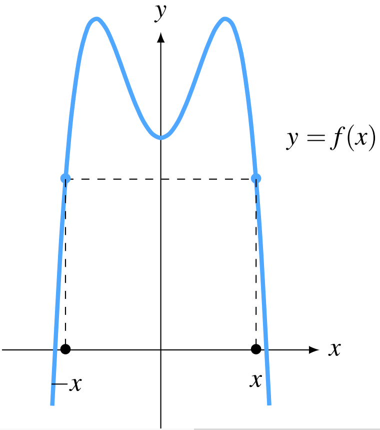
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$$

och ange den med intervallbeteckningar.

Extraövning: Bestäm värdemängden till ovanstående funktion.

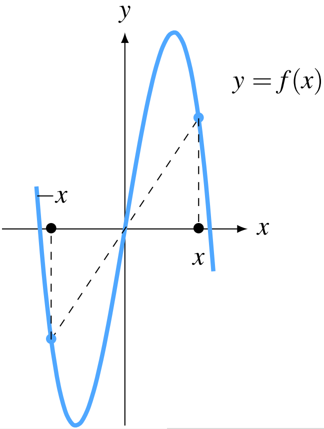
Om symmetri: Jämna funktioner

Vi definierar: En funktion är *jämn* om $f(-x) = f(x)$, för alla x som tillhör definitionsmängden till f. En jämn funktion är symmetrisk kring y-axeln.



Udda funktioner

En funktion är *udda* om det gäller att $f(-x) = -f(x)$, för alla x som tillhör definitionsmängden till f. En udda funktion är symmetrisk kring origo.



Exempel

Avgör om funktionen $f(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$ är udda eller jämn. $(\rightarrow)$

Lösningsförslag

Vi skissar lösningsmetodiken.

$$f(-x) = 2(-x)^4 + 7(-x)^3 - (-x)^2 + 9 = 2x^4 - 7x^3 - x^2 + 9.$$

Slutsatser?

Sammansatta funktioner

Givet funktionerna f och g. Den *sammansatta funktionen* $f \circ g$ (som utläses " f-boll-g") definieras som

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Definitionsmängden till $f \circ g$

Definitionsmängden till $f \circ g$ är mängden av alla x som tillhör definitionsmängden till g, så att $g(x)$ tillhör definitionsmängden till f.
Med matematisk formalism skriver vi

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}.$$

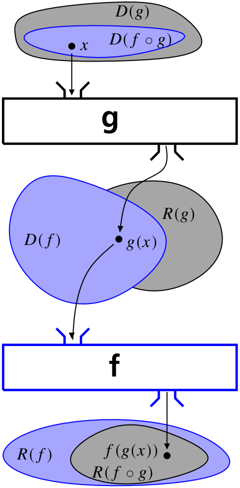


Figure P-57

Avslutande exempel

Om $f(x) = x^2 - 1$ och $g(x) = \sqrt{3-x}$, bestäm nedanstående funktioner och deras definitionsmängder.

- $f \circ g$, $(\rightarrow)$
- $g \circ f$. (Lös på egen hand)

Lösningsförslag, pkt 1

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{3-x})^2 - 1 = 2 - x.$

$$D_f = \{x \mid -\infty < x < \infty\}, D_g = \{x \mid x \leq 3\}.$$
$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} =$$
$$= \{x \in D_g \mid \sqrt{3-x} \in \mathbb{R}\} = \{x \mid -\infty < x \leq 3\}.$$

Lösningsförslag, pkt 2–tjuvkika inte

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{4 - x^2}$.

$$\begin{aligned}
&D_f = \{x \mid -\infty < x < \infty\}, D_g = \{x \mid x \leq 3\}.\\
&D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} =\\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \leq 3\} = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}.
\end{aligned}$$