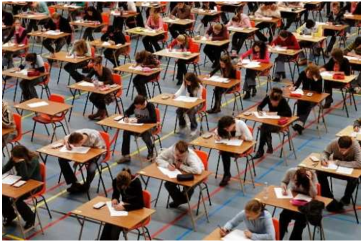
M0038M Differentialkalkyl, Lekt 7, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Tentamen M0038M

- Tentamensdatum 2015-10-28
- Sista anmälningsdag 2015-10-08
- Tentamensanmälan via ”Mitt LTU”



Exponentialfunktioner

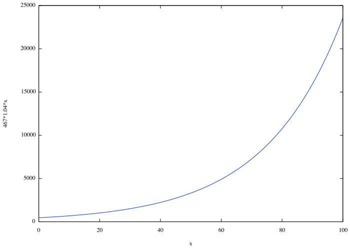
”Användningen av Internet växer exponentiellt”, skriver IT-företagen i ett remissvar till Näringsdepartementet. Vad betyder det? Man vill peka på något som förändras – växer eller avtar – procentuellt, dvs. med en viss bestämd procentsats per år.

Exempel

Mängden hushållsavfall i Sverige uppgick år 2002 till 467 kg per invånare. Man förväntar sig en ökning med 4 procent per år för de närmaste åren. Avfallsmängden y kan beskrivas med en exponentialfunktion:

$$y = 467 \cdot 1,04^x \quad ,$$

där x är tiden i år.



Anmärkning Talet 1,04 i $y = 467 \cdot 1,04^x$ kallas tillväxtfaktor. Förstår du varför funktionen ser ut som den gör?

Exempel

För radioaktivt sönderfall gäller för ett visst preparat funktionen

$$N(t) = N_0 \cdot 0,88^t \quad ,$$

där $N(t)$ är antalet kärnor vid tiden t (år) och N_0 är antalet kärnor vid $t = 0$.

Tillväxtfaktorn är i detta fall mindre än 1. Vad innebär detta för grafens utseende?

Sammanfattning

- En godtycklig exponentialfunktion skrivs

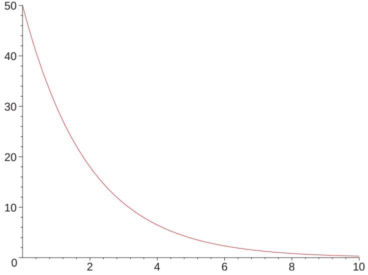
$$y(x) = a \cdot b^x \quad ,$$

  där $b > 0$.
- Grafen skär y-axeln i punkten $(0, a)$ men skär aldrig x-axeln.
- Om $b > 1$ är grafen ”konvext växande”.
- Om $0 < b < 1$ är grafen ”konvext avtagande”.

Vad kan du säga om fallet $b = 1$?

Exponentialfunktioner, forts

I ovanstående figur ser vi grafen till funktionen $f(x) = 50 \cdot 0,6^x$ (som utgör en modell för t. ex. radioaktivt sönderfall). Vi ställer oss frågan: Vad händer med grafen för stora x-värden?



Vi ser att grafen alltmer närmar sig x-axeln, utan att helt sammanfalla eller skära den. Den vågräta axeln utgör en s.k. vågrät asymptot.

Definition

Linjen $y = k$ är vågrät asymptot till kurvan $y = f(x)$, om $f(x) \to k$, då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$. Avståndet mellan kurva och asymptot går mot noll för stora $|x|$-värden.

Vi kommer att syssla med asymptoter längre fram.

Talet e

Vi har hittills studerat exponentialfunktioner av typen $f(x) = a \cdot b^x$. Vi har ställt krav att talet b skall vara större än noll. Låt oss emellertid börja med en intressant iakttagelse.

Betrakta exponentialfunktionen $f(x) = b^x$, $b > 0, b \neq 1$. Låt oss, för små värden på talet h, studera ändringskvoten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{b^{x+h} - b^x}{h} \overset{regel}{=}$$

$$= \frac{b^x \cdot b^h - b^x}{h} = b^x \cdot \frac{b^h - 1}{h} \quad .$$

Tabell

Hur uppför sig kvoten $\dfrac{b^h - 1}{h}$ för ”små” h-värden?

h	$\frac{2{,}6^h - 1}{h}$	$\frac{2{,}75^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$
0,1	1,0026	1,0645	1,1612
0,01	0,9601	1,0167	1,1047
0,001	0,9560	1,0121	1,0992
0,0001	0,9556	1,0116	1,0987

Vad händer då h blir mindre och mindre? En viktig iakttagelse är, att för ett b-värde någonstans mellan 2,6 och 2,75 tycks kvoten $\dfrac{b^h - 1}{h}$ allt mer närma sig värdet 1.

Konsekvens: För ett b-värde någonstans mellan 2,6 och 2,75, betyder det att ändringskvoten, för små h-värden, kan skrivas

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{b^{x+h} - b^x}{h} \approx 1 \cdot b^x \quad .$$

Definition

Detta intressanta faktum, att ändringskvoten tycks närma sig exponentialfunktionen, gäller för ett speciellt b-värde, som man kallar e. Talet $e \approx 2,7183...$ utgör grund till den s.k. naturliga exponentialfunktionen:

En godtycklig exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$, med basen b, kan uttryckas som den naturliga exponentialfunktionen:

$$f(x) = a \cdot \mathrm{e}^{kx}, \quad \text{där } b = \mathrm{e}^{k}, \text{ för något tal } k.$$

Minnesregel

$k > 0$ $f(x)$ tillväxer,

$k < 0$ $f(x)$ avtar.

Kuriosa

$$e \approx 2.7182818284\,5904523536\,0287471352\,6624977572\,4709369995\ldots$$

- Kallas också *Eulers tal*. Ca 1727 började Euler började bokstaven e för att definiera talet.
- Talet e är irrationellt, dvs talet kan ej uttryckas som en kvot där täljaren och nämnaren är heltal.
- Euler bevisade att talet e har en oändlig decimalutveckling.
- Gällande världsrekord i antal decimaler: 10^{12} decimaler, beräkningstid 224 timmar, juli 2010. Dator Intel Core i7 980X @ 3.33 GHz.

Potensfunktioner

I definitionen av en exponentialfunktion, befann sig den oberoende variabeln i exponenten, medan basen var fixerad. Nu gör vi det omvända, så att basen blir den oberoende variabeln, medan exponenten fixeras.

Funktionen $y = x^p$, där p är en reell konstant, kallas en potensfunktion. Definitionsmängden är åtminstone $0 < x < \infty$, men kan (för vissa val av p) expanderas.

Egenskaper

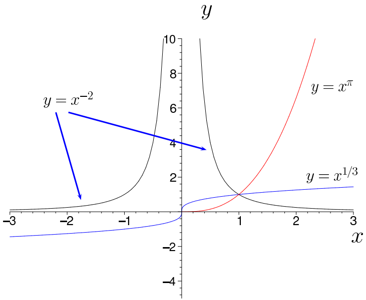
Självklart spelar exponenten en viktig roll när det gäller att bestämma egenskaperna hos en potensfunktion.

- Om p är ett heltal (t.ex. $p = 2$) eller vissa rationella tal (t.ex. $p = 1/3$), så är $y = x^p$ definierad också för $x < 0$, ibland för $x = 0$.
- Om $p = -2$, hur ser definitionsmängden ut för detta p-värde?

Låt oss analysera några grafer.

Egenskaper, forts

I vidstående figur är graferna till de tre potensfunktionerna $y = x^{-2}$, $y = x^{\pi}$ samt $y = x^{1/3}$ avbildade. Definitionsmängderna varierar som vi nyss nämnde.



Anm Funktionen x^{π} är definierad för $0 \le x < \infty$.

Potenslagarna

För potensfunktioner gäller följande räkneregler, potenslagarna:

- $x^0 = 1$
- $x^{-p} = \dfrac{1}{x^p}$
- $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$
- $(x^p)^q = x^{pq}$
- $x^{1/p} = \sqrt[p]{x}$

Anmärkning

Antag att $x = 3, p = 2$.
Vi betraktar talet $3^{0,5}$. Enligt en räkneregel gäller

$$3^{0,5} \cdot 3^{0,5} = 3^{0,5+0,5} = 3.$$

Detta kan alternativt skrivas $(3^{0,5})^2 = 3$.

Det enda positiva tal som har egenskapen att dess kvadrat är lika med 3 är (kvadrat-)roten ur 3. Således $3^{1/2} = \sqrt{3}$.

Exempel

- Förenkla $\sqrt{\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{x^{-1}}(x^2)^{2/3}}$
- Lös ekvationen $(x^{1/3}+2)(x^{1/3}-2)=12$, $x \geq 0$.

Sammanfattning

Potensfunktionen $y = x^p$, där $p \in \mathbb{R}$

- är definierad för åtminstone $x > 0$,
- har, för vissa val av p, hela tallinjen som definitionsmängd,
- är växande om $p > 0$,
- är avtagande om $p < 0$,
- går genom punkten $(1, 1)$.

Avslutande exempel

Radien hos en sfär är proportionell mot kubikroten ur dess volym. Om en sfär med radien 18.2 cm har volymen 25.2 liter, bestäm radien hos den sfär vars volym är 30 liter.

Svar: $r \approx 19.3$ cm.