M0038M Differentialkalkyl, Lekt 9, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Repetition Lekt 8

Lös ekvationen

- $\cos\theta = \tan\theta.$

Additions- och subtraktionsformlerna

Vi skall visa några mycket användbara formler.

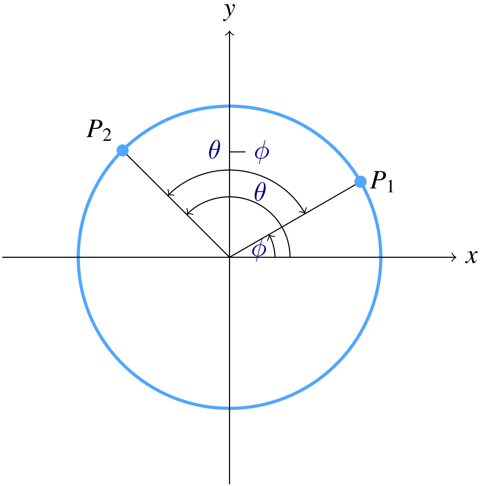
Visa att för alla vinklar ϕ och θ gäller

$$\cos(\theta - \phi) = \cos\theta \cdot \cos\phi + \sin\theta \cdot \sin\phi \quad . \tag{1}$$

I resonemanget använder vi enhetscirkeln samt två (förhoppningsvis) välkända formler, avståndsformeln respektive cosinussatsen.

Avståndet P_1P_2 skall vi beskriva på två sätt:

- $(P_1P_2)^2 = (\cos\theta - \cos\phi)^2 + (\sin\theta - \sin\phi)^2$ (Avst.formeln)
- $(P_1P_2)^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\theta - \phi)$ (Cos-satsen)



Vi sätter dessa två uttryck lika med varandra, samt gör en del förenklingar:

$$2 - 2(\cos\theta\ \cos\phi + \sin\theta\ \sin\phi) = 2 - 2\cos(\theta - \phi),$$

varav

$$\cos(\theta - \phi) = \cos\theta\ \cos\phi + \sin\theta\ \sin\phi \quad .$$

Om vi i (1) byter ut ϕ mot $-\phi$ får vi

$$
\begin{gathered}
cos(\theta + \phi) = \cos(\theta - (-\phi)) = \\
= \cos\theta \cdot \cos(-\phi) + \sin\theta \cdot \sin(-\phi) = \\
= \cos\theta\ \cos\phi - \sin\theta\ \sin\phi \quad .
\end{gathered}
$$

Om vi i (1) byter ut θ mot $\pi/2 - \theta$ får vi

$$\begin{aligned}
\sin(\theta + \phi) &= \cos(\pi/2 - (\theta + \phi)) = \\
&= \cos((\pi/2 - \theta) - \phi) = \\
&= \cos(\pi/2 - \theta) \cdot \cos\phi + \\
&+ \sin(\pi/2 - \theta) \cdot \sin\phi = \\
&= \sin\theta \; \cos\phi + \cos\theta \; \sin\phi \quad .
\end{aligned}$$

Om vi i sista formeln byter ut ϕ mot $-\phi$ får vi

$$\sin(\theta - \phi) = \sin(\theta + (-\phi)) = \\ = \sin\theta\ \cos\phi - \cos\theta\ \sin\phi \quad .$$

Sammanfattning

För alla vinklar ϕ och θ gäller

$$\cos(\theta - \phi) = \cos\theta\ \cos\phi + \sin\theta\ \sin\phi \quad (2)$$
$$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\ \cos\phi - \sin\theta\ \sin\phi \quad (3)$$
$$\sin(\theta - \phi) = \sin\theta\ \cos\phi - \cos\theta\ \sin\phi \quad (4)$$
$$\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\ \cos\phi + \cos\theta\ \sin\phi \quad (5)$$

Exempel

- Beräkna *exakt, inget närmevärde,* $\tan 7\pi/12$ genom att utnyttja att $7\pi/12 = \pi/3 + \pi/4$.

Dubbla vinkeln

Om vi i (3) respektive (5) sätter $\phi = \theta$, får vi:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = $$
$$= 2 \cdot \cos^2\theta - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2\theta \quad ,$$

$$\sin 2\theta = 2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \quad .$$

Viktig anmärkning

På Fronter finns en länk ”utantil-lapp” som man kan ladda hem. Det som står på detta papper är jätteviktigt och skall läras utantill.

Exempel

- Visa att för alla θ gäller

$$\cos 3\theta = 4\,\cos^3\theta - 3\,\cos\theta.$$

- Lös på egen hand Härled formeln

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\cos 2x} - \tan 2x$$

Du får nyttja kända formler för $\cos 2x$ och $\sin 2x$.

Lösningsförslag–pkt 2 (tjyvkika inte)

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} = \quad \text{(Konjugatregel i N)}$$

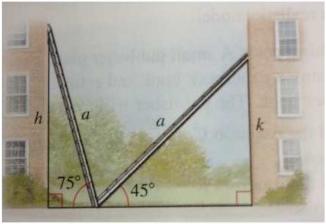
$$= \frac{(\cos x - \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x} =$$

$$= \frac{1}{\cos 2x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} =$$

$$= \frac{1}{\cos 2x} - \tan 2x \quad \text{och vi är klara.}$$

Avslutande exempel – lite knepigt

Två stegar med samma längd a meter står lutade mot var sig husvägg i en gränd så att deras nederdelar möts (se figur). Den ena stegen når h meter upp mot ena väggen och bildar 75° med gränden. Den andra stegen når k meter upp mot andra väggen och bildar 45° med gränden. Bestäm grändens bredd uttryckt i h. Antag att gränden är horisontell och bildar rät vinkel mot bägge husväggarna.



Hmmm. . .