M0038M Differentialkalkyl, Lekt 12, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Differentialkalkyl

Differentialkalkylen har en lång historia. Det var dock under 1600-talet som de stora framstegen gjordes. Leibniz' och Newtons infinitesimalkalkyler var epokgörande bidrag.

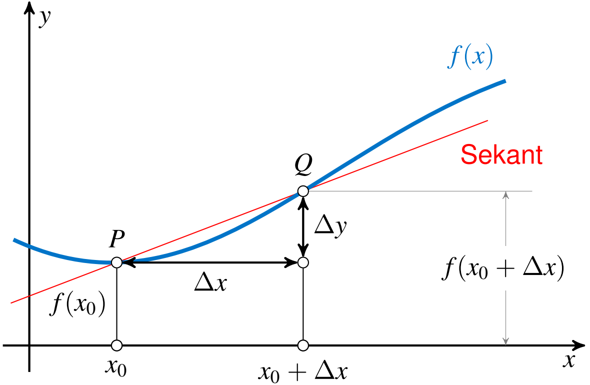
Fransmannen Cauchy definierade gränsvärdesbegreppet ca 1820. Tysken Weierstrass gav gränsvärdesdefinitionen dess nuvarande form, ca 1870.

Efter Newton och Leibniz utvecklades differentialkalkylen mot följande tillämpningar:

- Kurvstudier
  - Extremvärden, max- och minpunkter
  - Kurvors krökning
- Differentialekvationer
- Variationskalkyl

Inledande frågeställning

Antag att $f(x)$ är definierat för alla x nära (på bägge sidor om) x_0, utom möjligen för $x = x_0$. Genom punkterna $P = (x_0, f(x_0))$ och Q på grafen till $y = f(x)$ drar vi en rät linje, en *sekant*.



Ändringskvot

Sekantens lutning anges, som vi nog redan känner till, av *ändringskvoten* $\Delta y/\Delta x$. Vi ställer oss frågan: Vad händer med ändringskvoten då $\Delta x \to 0$?

Vi konstaterar direkt att ändringskvoten ej är definierad för $\Delta x = 0$.

Kan ändå kvoten existera som ett ändligt värde trots att nämnaren blir hur liten som helst?

Exempel

Antag att $f(x) = \sqrt{x}$. Punkten $P : (1, 1)$. Ändringskvoten

$$k_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{1+\Delta x} - 1}{\Delta x} \quad .$$

Låt $\Delta x \to 0$. Vi tittar på en tabell över en del av förloppet.

Låt $x = 1 + \Delta x$, då är

$$k_{PQ} = \frac{\sqrt{1+\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \quad .$$

och $\Delta x \to 0$ motsvarar $x \to 1$.

x	$y = \sqrt{x}$	Ändringskvot
1,5	1,224744871	0,449489743
1,25	1,118033989	0,472135955
1,125	1,060660172	0,485281374
1,05	1,024695077	0,493901532
1,005	1,002496883	0,499376558
1,0005	1,000249969	0,499937516
1,00005	1,000025	0,49999375

Det tycks som om ändringskvoten närmar sig värdet 0.5 då x närmar sig 1. Vi formulerar det mer generellt:

Definition

Funktionen $f(x)$ har *gränsvärdet* L då $x \to x_0$, om det går att få $f(x)$ att ligga godtyckligt nära L då avståndet mellan x och x_0 är tillräckligt litet. Skrivsätt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad .$$

Anmärkning Detta är en intuitiv definition – det finns en mer strikt formulering.
Vi förutsätter inte att $f(x)$ är definierad i $x = x_0$. Gränsvärdet uttalar sig om hur $f(x)$ uppför sig nära $x = x_0$, men inget sägs om $f(x_0)$.

Att arbeta med gränsvärdeskalkyl

När man bestämmer gränsvärden, börjar man *alltid* med att göra en direkt gränsövergång, dvs. en direkt insättning i aktuellt uttryck.

Tyvärr fungerar inte det i alla lägen. Orsaken är, att man ofta behandlar bråk, där både täljaren och nämnaren båda går mot noll (s.k. ”noll-genom-noll-uttryck”).

Obestämbara uttryck

Man kan inte göra några tvärsäkra uttalanden om eventuella gränsvärden för sådana obestämbara uttryck, utan det krävs ytterligare undersökningar. Ofta måste man som regel göra s.k. ”fiffiga omskrivningar”.

Vi visar tekniken med några exempel.

Exempel

Bestäm

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Direkt insättning fungerar ej här. Ger obestämbart uttryck.

Metod: Faktorisering.

Ytterligare exempel

Bestäm

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$$

$\frac{0}{0}$- uttryck vid direkt insättning.

Metod: Prova en algebraisk förenkling.

Mer exempel

Bestäm

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$$

$\dfrac{0}{0}$- uttryck vid direkt insättning.

Metod: Konjugatförlängning.

Gränsvärden, forts.

Vi undersöker

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

då $|x|$ blir stort. Gör vi direkt insättning, får vi ännu ett obestämbart uttryck, denna gång på formen $\dfrac{\infty}{\infty}$. Är det möjligt att sådana uttryck kan närma sig ett ändligt tal för stora $|x|$?

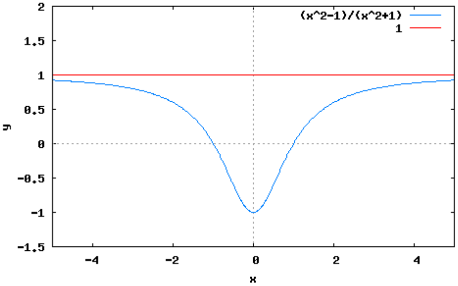
Innan kalkylerna tar vid, börjar vi med en numerisk betraktelse av vårt bråk.

Tabell

Vi genererar en tabell:

x	f(x)
0	-1
1	0
-1	0
10	0,98019802
-10	0,98019802
50	0,99920032
-50	0,99920032
100	0,99980002
-100	0,99980002
1000	0,999998
-1000	0,999998

Graf



Det tycks vara så, att då $|x|$ blir större och större, så krymper avståndet mellan $f(x)$ och $y = 1$.

Vi skriver

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$$

Definition Låt f vara en funktion, definierad på intervallet (x_0,∞). Då betyder

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

att man kan få $f(x)$ att ligga godtyckligt nära L för tillräckligt stora x. Linjen $y=L$ kallas en vågrät *asymptot.*

Anmärkning

Man kan analogt definiera gränsvärdet av f då x går mot minus oändligheten (se föregående exempel). Att $f(x)$ går mot L då x går mot minus oändligheten skrivs

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Exempel

Bestäm

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

Direkt insättning ger $\frac{\infty}{\infty}$-uttryck.

Metod: Bryt ut ”den dominanta faktorn” i täljare och nämnare.

Avslutande exempel

Bestäm

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

Direkt insättning ger obestämbart $\infty - \infty$-uttryck.

Metod: Konjugatförlängning.

Räkna på egen hand

Beräkna om möjligt

(a)

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - x - 6}$$

(b)

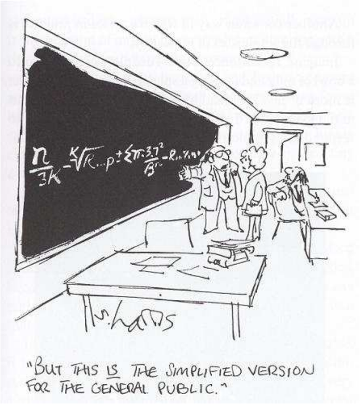
$$\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1})$$

(c)

$$\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}\right)$$

Svar: (a) $8/5$, (b) $-1/2$, (c) 2

Hmmm. . .


S. Harris
"BUT THIS IS THE SIMPLIFIED VERSION FOR THE GENERAL PUBLIC."