M0038M Differentialkalkyl, Lekt 13, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Repetition Lekt 12

Beräkna följande gränsvärden

(a)

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + x - 20}{x - 4}$$

(b)

$$\lim_{x \to \infty} (x - \sqrt{x^2 - 1})$$

Kontinuitet

Vi skärper till gränsvärdesdefinitionen en smula. Minns, att vi inte krävde att f skulle vara definierad i $x = x_0$ för att ett gränsvärde i x_0 skulle existera.

Antag att vi skulle sätta upp följande ”vässade” kravspecifikation:

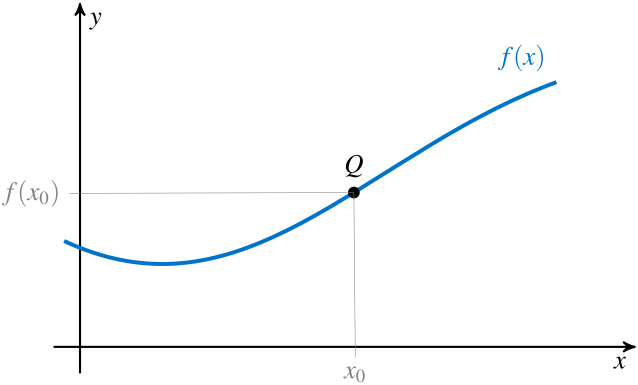
- Talet $f(x_0)$ existerar, dvs, f är definierad i x_0,
- $\lim_{x \to x_0}$ existerar och är lika med L,
- Gränsvärdet L är lika med $f(x_0)$.

Om dessa krav är uppfyllda, säger vi att $f(x)$ är *kontinuerlig* i $x = x_0$.

Kontinuitet i en punkt

Funktionen $f(x)$ är *kontinuerlig* i punkten $x = x_0$ om

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad .$$



Geometrisk tolkning

Ett annat sätt att skriva detta är

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0 \text{ då } \Delta x \to 0.$$

Detta kan uttryckas: För en kontinuerlig funktion medför en liten ändring av x att ändringen i funktionsvärdet $f(x)$ blir litet.

Litet populärt skulle man uttrycka det så: En funktion är kontinuerlig om dess graf är *sammanhängande*, dvs. man kan upprita dess graf utan att behöva lyfta på pennan.

Höger- och vänsterkontinuitet

Analogt med *höger- och vänstergränsvärde* (s. 132 FN), kan man definiera höger- och vänsterkontinuitet.

- Funktionen $f(x)$ är *högerkontinuerlig* i punkten $x = x_0$ om

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0) \quad .$$

- Funktionen $f(x)$ är *vänsterkontinuerlig* i punkten $x = x_0$ om

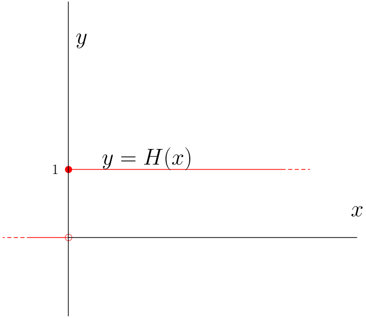
$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0) \quad .$$

Det innebär att $f(x)$ är *kontinuerlig* i $x = x_0$ om och endast om $f(x)$ är såväl vänster- som högerkontinuerlig i $x = x_0$.

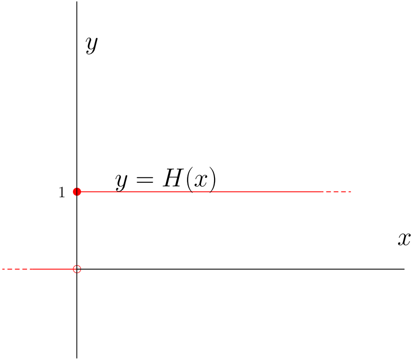
Heavisides språngfunktion

I exempelvis reglertekniska sammanhang används ofta *Heavisides funktion* $H(x)$, definierad som

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$



Med hänvisning till ovanstående definition är $H(x)$ högerkontinuerlig i $x = 0$.



Kontinuitet i ett intervall

En funktion är kontinuerlig i ett intervall om den är kontinuerlig i varje punkt där den är definierad. Därför är exempelvis:

- polynom kontinuerliga,
- rationella funktioner kontinuerliga,
- sin, cos, tan kontinuerliga.

Diskontinuitet

Om f ej är definierad i $x = x_0$ är funktionen diskontinuerlig i x_0. Detta hindrar inte (se t.ex. tidigare exempel) att gränsvärdet

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

kan existera. Då har vi möjlighet att *häva diskontinuiteten*. Se Ex. 3.16 s. 136 FN.

Däremot uppvisar exempelvis Heavisidefunktionen $H(x)$ en mer allvarlig typ av diskontinuitet. Diskontinuiteten är *icke-hävbar*.

Egenskaper hos kontinuerliga funktioner

Nedanstående sats är ett viktig verktyg som vi kommer att använda framöver.

Om f är en funktion, kontinuerlig på **slutna** intervallet $[a, b]$, så antar f såväl sin övre som sin undre gräns (dvs. sitt största och minsta värde) i intervallet.

Villkoren i satsen är väsentliga

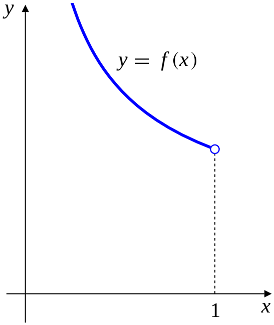


Figure 1-24

(a) Fall 1.

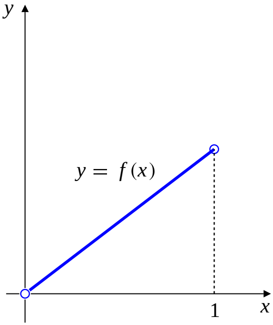


Figure 1-25

(b) Fall 2.

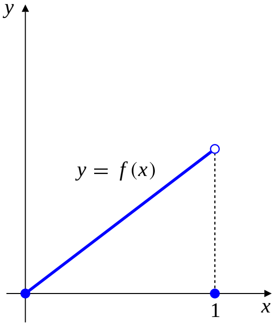


Figure 1-26

(c) Fall 3.

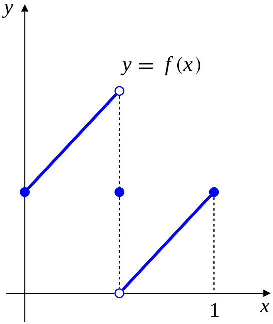
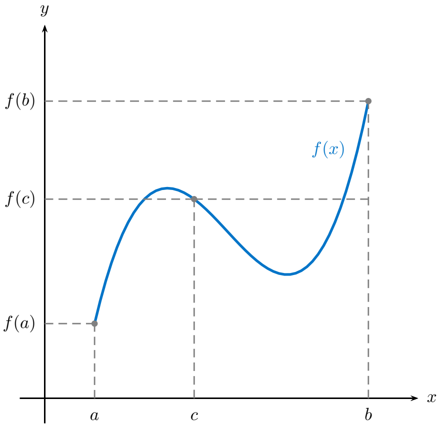


Figure 1-27

(d) Fall 4.

Mellanliggande värden

Om f är en funktion, kontinuerlig på **slutna** intervallet $[a, b]$ och s är ett tal mellan $f(a)$ och $f(b)$, så existerar åtminstone ett tal c i mellan a och b, så att $f(c) = s$.

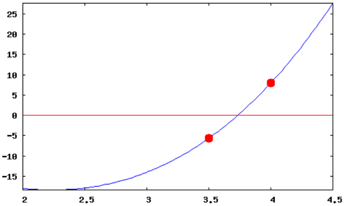


Tillämpning

En viktig tillämpning av denna sats är lösning av ekvationen $f(x) = 0$, där f är kontinuerlig.

Exempel Vi ska lösa ekvationen $x^3 - 15x + 4 = 0$.

Vi noterar att $f(3.5) < 0$ medan $f(4) > 0$. Då existerar – enligt satsen om mellanliggande värden – (minst) ett x mellan 3.5 och 4 så att $f(x) = 0$.



Avslutande exempel

En funktion f definieras som

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x^2 - 5ax + a^2}{x - 1} & \text{för } x \neq 1, \\ b & \text{för } x = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Bestäm a och b så att funktionen (1) blir kontinuerlig i $x = 1$.

Lös på egen hand

En funktion f definieras som

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax - x^2 & \text{om } x < 2 \\ 1 - ax & \text{om } x \geq 2 \end{cases}$$

Bestäm a så att f blir kontinuerlig i $x = 2$.

Svar: $a = 1$

Att fundera på. . .

Diskutera gränsvärde och kontinuitet i punkterna a-g i figuren.