M0038M Differentialkalkyl, Lekt 14, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Repetition Lekt 13

En funktion f definieras som

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax - x^2 & \text{om } x < 2 \\ 1 - ax & \text{om } x \geq 2 \end{cases}$$

Bestäm a så att f blir kontinuerlig i $x = 2$.

Standardgränsvärden

På s. 145 ff i FN , finns ett antal s.k. standardgränsvärden, dvs. gränsvärden man utnyttjar utan bevis. Standardgränsvärdena är viktiga och måste läras utantill. Vi inleder med

Sats För $\theta \in \mathbb{R}$ gäller

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad \text{(Standardgränsvärde 3.11 (a))}$$

Fuskbevis

Vi ger en intuitiv härledning. För mer stringent bevisföring hänvisas till FN.

Antag att $x > 0$. Låt oss generera en tabell där vi tittar lite närmare på på funktionsvärdena till funktionen $f(x) = \sin(x)/x$, för allt mindre x-värden.

Vi startar med $x = 1$ och halverar x-värdena successivt.

Tabell

x	f(x)=sin(x)/x
1,000000	0,841470985
0,500000	0,958851077
0,250000	0,989615837
0,125000	0,997397867
0,062500	0,999349085
0,031250	0,999837248
0,015625	0,99995931
0,007813	0,999989828
0,003906	0,999997457
0,001953	0,999999364

Vi konstaterar att gränsvärdet tycks bli 1, och vi är klara.

Anm Prova att göra om processen, nu med $x < 0$. Vad händer?

Exempel

Bestäm

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 7x}{\sin x}$

Anm Första gränsvärdet i exemplet återfinner vi som Standardgränsvärde 3.11 (b).

Om att hinna först till oändligheten

Vi har förmodligen kunskap om att exponentialfunktionen (med bas > 1), potensfunktionen (med positiv exponent) samt den naturliga logaritmfunktionen samtliga växer mot oändligheten.

Exempel Avgör om

$$\frac{e^{2x} + e^{x} \ln x}{e^{2x} - 2xe^{x} + x^2}$$

antar ett ändligt värde då $x \to \infty$. Det märkliga är, att såväl täljaren

som nämnaren – var för sig – går mot oändligheten. Kan verkligen kvoten bli ändlig?

Första sanningen

Följande två regler tar vi utan bevis.

Varje potensfunktion med positiv exponent växer snabbare än den naturliga logaritmfunktionen.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \quad \text{(standardgränsvärde 3.13 (a))}$$

Andra sanningen

Varje exponentialfunktion med bas > 1 växer snabbare än varje potensfunktion med positiv exponent.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0 \quad (\text{standardgränsvärde 3.13 (b)})$$

Anmärkning

- Den i särklass långsammaste funktionen är logaritmfunktionen.
- På silverplats hamnar potensfunktionen.
- Förstaplatsen i detta lopp mot oändligheten erövras av exponentialfunktionen.

Vi löser exemplet

Avgör om

$$\frac{e^{2x} + e^{x} \ln x}{e^{2x} - 2xe^{x} + x^2}$$

antar ett ändligt värde då $x \to \infty$.

Vi konstaterar, att (för stora x) dominerar termen e^{2x} i täljaren och nämnaren. Låt oss bryta ut dessa dominerande termer.

$$\frac{\mathrm{e}^{2x}\left(1+\dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^{x}}\right)}{\mathrm{e}^{2x}\left(1-\dfrac{2x}{\mathrm{e}^{x}}+\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}$$

Vi förkortar och åberopar våra standardgränsvärden:

$$\frac{1 + \overbrace{\dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^{x}}}^{\to 0}}{1 - \underbrace{\dfrac{2x}{\mathrm{e}^{x}}}_{\to 0} + \underbrace{\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}}_{\to 0}}$$

Vi konstaterar avslutningsvis:

$$\frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} \ln x}{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{x} + x^2} \to \frac{1+0}{1-0+0} = 1, \quad \text{då } x \to \infty.$$

Anmärkning

Följande standardgränsvärden skall också memoreras. Vi återkommer till härledningen längre fram.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{(Standardgränsvärde 3.11 (c))}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{(Standardgränsvärde 3.11 (d))}$$

Avslutande exempel

Bestäm

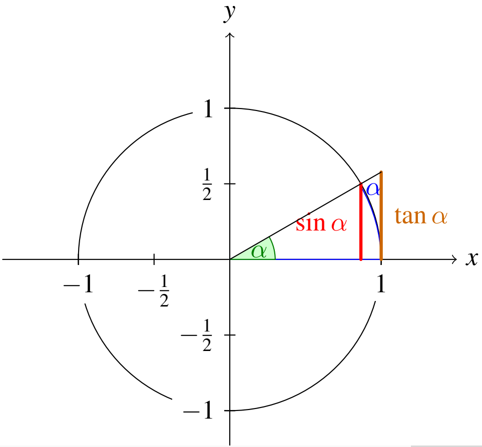
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)2^x - 3^x + \ln x}{3^x + x^5\, 2^x}$$

För den intresserade

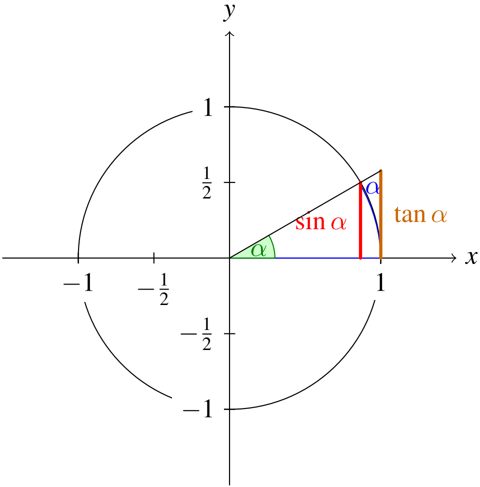
För att visa

$$\lim_{\alpha \to 0+} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

används ett geometriskt resonemang.



Arearesonemang



$$\text{Area(stora triangeln)} = \frac{\tan\alpha}{2}$$

$$\text{Area(Cirkelsektor)} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Area(lilla triangeln)} = \frac{\sin\alpha}{2}$$

Olikheter, instängning

$$\sin\alpha \le \alpha \le \tan\alpha$$

$$\sin\alpha \le \alpha \le \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{(Invertering vänder olikheter)}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \le \frac{1}{\alpha} \le \frac{1}{\sin\alpha} \quad \text{(Mult med } \sin\alpha\text{)}$$

$$\cos\alpha \le \frac{\sin\alpha}{\alpha} \le 1$$

Eftersom $\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = 1 = \lim_{\alpha\to 0} 1$, stängs $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ in mellan två funktioner som bägge går mot 1.
Enligt den s.k. "Instängningssatsen(Squeeze Theorem)" följer satsen, och vi är klara.