# M0038M Differentialkalkyl, Lekt 15, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

# Repetition Lekt 14

Bestäm följande gränsvärden

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \tan x}{x}$$

- $$\lim_{x\to \infty} \frac{x + \ln\left(e^{2x} + x\right)}{\sqrt{x} + e^{\ln x + 1}}$$

# Talföljder

En (ändlig eller oändlig) följd av tal (vanligen heltal eller rationella tal), som skapats genom en föreskriven regel, kallas en talföljd. Med symbolen

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

menas talföljden $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

Exempelvis beskrivs talföljden

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots \text{ av att } a_n = \frac{1}{n}\ , n = 1, 2, 3, \ldots$$

# Aritmetisk talföljd

En aritmetisk talföljd är en talföljd där differensen mellan två på varandra följande element är konstant.
Exempelvis är 5, 9, 13, 17, 21, ... en aritmetisk talföljd med differensen 4.

Den generella formeln för en aritmetisk talföljd är:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

# Geometrisk talföljd

En geometrisk talföljd är en talföljd där kvoten mellan två på varandra följande element är konstant.
Talföljden 1, 2, 4, 8, ... är ett exempel på en geometrisk talföljd.

Den generella formeln för en geometrisk talföljd är

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

# Exempel

- En aritmetisk talföljd är 9, 7, 5, 3, ... Det sista elementet i den aritmetiska talföljden är -17. Bestäm hur många element denna talföljd innehåller.
- En geometrisk talföljd är 4, 12, 36, ... Bestäm det sjätte elementet i talföljden.

Stöd för minnet

Aritm talföljd $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Geom talföljd $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

# Om talföljder och deras gränsvärden

Talföljder $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kan vi uppfatta som funktioner med de naturliga talen som definitionsmängd. Gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

bestäms med de metoder vi studerade under föregående lektion. Vi studerar talföljders konvergens mer ingående i kursen M0039M.

# Exempel

Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n + 7}{4 - 6n^2}$$

# Rekursiva talföljder

Talföljder $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ kan även definieras rekursivt.
I dess enklaste form beror $a_n$ enbart på det föregående värdet $a_{n-1}$:

$$a_n = f(a_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Begynnelsevärde $a_0$

Tillsammans med begynnelsevärdet $a_0$ bildar ovanstående rekursionsformel en talföljd.

Beroende på $f(x)$, är talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent eller divergent.
I numeriska sammanhang används konvergenta rekursiva talföljder vid numerisk ekvationslösning.

# Avslutande exempel

Bestäm en lösning nära $x = 1$ till

$$\cos(x) - x = 0$$

Vi skriver om ekvationen som

$$x = \cos(x)$$

# Lösningsförslag

Rekursionsformeln

$$a_n = \cos(a_{n-1}), \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$
$$a_1 = 1$$

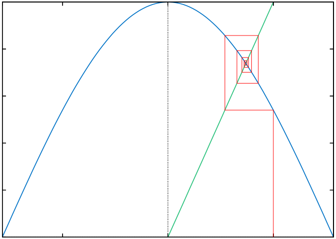
definierar en talföljd.
Vi beräknar successivt

$$a_1 = 1, a_2 \approx 0.540, a_3 \approx 0.858, a_4 \approx 0.654, a_5 \approx 0.793, \ldots$$

Så småningom kommer vi till ett läge där differensen mellan närliggande $a_n$-värden blir i det närmaste försumbar. Talföljden konvergerar.

# Geometrisk tolkning

Den rekursiva talföljden är konvergent mot gränsvärdet $s \approx 0.7391$, avrundat till 4 decimaler. Detta värde är lösningen till ekvationen $\cos(x) = x$



Talet $s$ kallas i numeriska sammanhang för en *fixpunkt*. Processen, som grafiskt beskrivs med den rektangulära spiralen, kallas för fixpunktsiteration.

# Prova på egen hand

Testa processen i föregående exempel med att skriva ekvationen

$$x^3 + x - 1 = 0 \quad \text{som} \quad x = 1 - x^3.$$

Detta ger rekursionsformeln

$$a_n = 1 - a_{n-1}^3, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$a_0 = 1$$

Pröva konvergens/divergens med miniräknare.

# Räkna själv

Skriv de fyra första talen i talföljden

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}\ , n \geq 0.$$

Svar: $0,\ 1/2,\ 4/3,\ 9/4,\ 16/5$

Hmmm. . .