M0038M Differentialkalkyl, Lekt 16, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

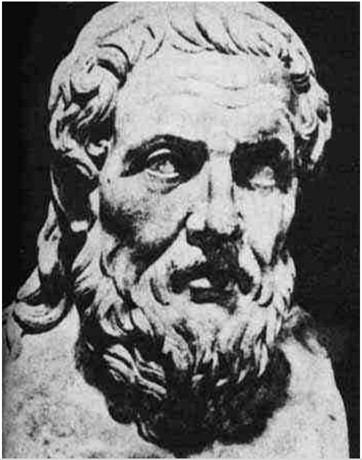
Repetition Lekt 15

Femte och trettioförsta elementet i en aritmetisk talföljd är 7 respektive 1/2. Bestäm dels den aritmetiska talföljdens differens, dels det första elementet i talföljden.

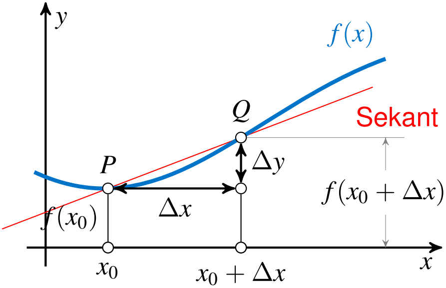
Tangenten till en kurva m.m.

1600-talets största matematiska framsteg var förmodligen införandet av differentialkalkylen, som Leibniz och Newton utvecklade.

Detta verktyg visade sig vara en utmärkt modell för att kunna bestämma en tangent till en kurva, ett klassiskt problem som studerades redan på 200-talet f.Kr. av den grekiske matematikern med smeknamnet "den store geometrikern", Apollonius.



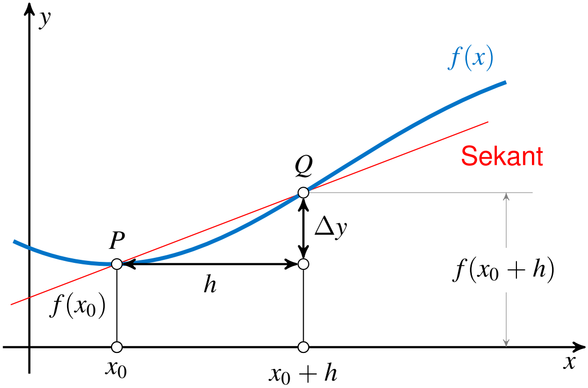
Differenskvot/Ändringskvot



För funktionen $y = f(x)$ gäller att den genomsnittliga förändringshastigheten beskrivs av differenskvoten/ändringskvoten $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Den genomsnittliga förändringshastigheten utgör vårt verktyg för att närmare analysera vad som händer då tillskottet i x-led går mot allt mindre värden.

Vi betraktar nedanstående figur:



Genom punkterna P och Q på grafen till $y = f(x)$ drar vi en sekant.
Tillskottet i x-led benämner vi h (tidigare Δx).

Ur figuren konstaterar vi:

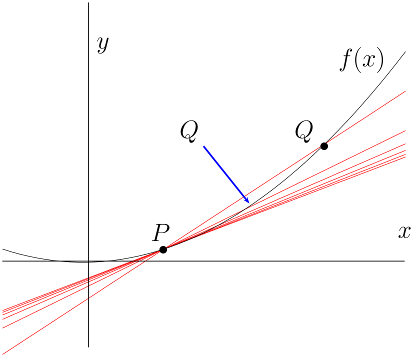
$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) \quad .$$

Sekantens lutning (riktningskoefficient) anges, som vi nog redan känner till, av ändringskvoten

$$k_{PQ} = \frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Vi ställer oss frågan: Vad händer då $h \to 0$? Vi tänker oss följande process:

Vi låter punkten P vara fixerad och tänker oss att punkten Q färdas på grafen och alltmer närmar sig punkten P. Låt oss konstruera en följd av sekanter, alla med egenskapen att passera genom punkterna P och Q.



Derivatans definition

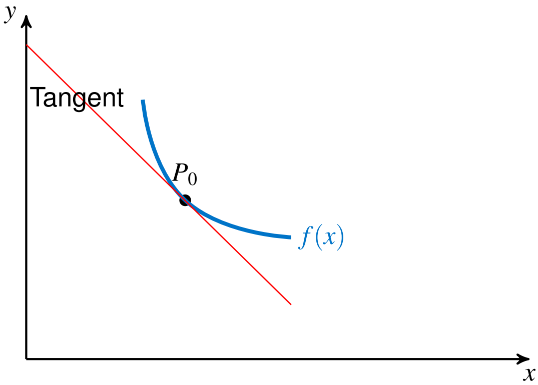
Ur figuren ser vi att sviten av sekanter kommer att övergå till *tangenten* till funktionskurvan $y = f(x)$ i punkten P. Med detta intuitiva resonemang har vi förberett oss för följande definition

En funktion f är *deriverbar* i x_0 om och endast om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existerar. Detta gränsvärde benämns *derivatan av* f *i* x_0 med beteckningen $f'(x_0)$.

Geometrisk tolkning



Geometriskt är $f'(x_0)$ riktningskoefficienten hos den räta linje som tangerar $y = f(x)$ i tangeringspunkten $P_0 : (x_0, f(x_0))$.

Anmärkning

- Ändringskvoten anger den *genomsnittliga* förändringshastigheten.
- Derivatan anger den *momentana* förändringshastigheten, dvs. förändringshastigheten i en punkt.

Exempel Låt $f(x) = x^2 - 3x$ och utför följande kalkyler:

- Ställ upp och förenkla ändringskvoten

$$\frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

- Låt $h \to 0$ i ändringskvoten. Vad händer?

Exempel

Använd definitionen av derivata för att bestämma $f'(x)$ då

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \quad .$$

Lösningsförslag

Vi betraktar ändringskvoten:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{x+h}{1+x+h}-\frac{x}{1+x}}{h} = \\
&= \frac{(x+h)(1+x)-x(1+x+h)}{h(1+x+h)(1+x)} = \qquad \text{(Lite pyssel\dots)} \\
&= \frac{1}{(1+x+h)(1+x)} \quad .
\end{aligned}
$$

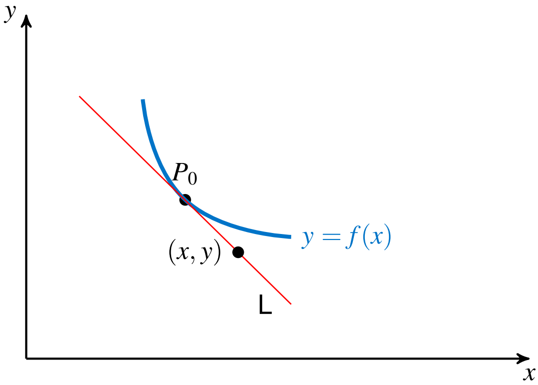
Sedan låter vi h gå mot noll:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(1+x+h)(1+x)} = \frac{1}{(1+x)^2} \quad ,$$

och vi är klara.

Tangentens ekvation

Välj en punkt $P_0 : (x_0, y_0)$ på kurvan $y = f(x)$. Välj vidare en godtycklig punkt (x, y) på tangenten L. Om f är deriverbar i x_0, innebär detta att kurvans tangent i P_0 har riktningskoefficienten $f'(x_0)$.



Men riktningskoefficienten kan alternativt uttryckas

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} \quad .$$

Med andra ord kan tangentens ekvation kan skrivas

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Anmärkning Med välkända uttrycket $y = kx + m$ skriver vi alternativt tangentens ekvation:

$$y = f'(x_0) \cdot x + m, \text{ där } m = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Exempel

Låt $f(x) = x^2 + 4x$.

- Bestäm riktningskoefficienten för tangenten till funktionskurvan $y = f(x)$ i den punkt där $x = 1$.
- Bestäm tangentens ekvation i tangeringspunkten med x-koordinaten 1.

Anmärkning För vinkelräta linjer L_1 resp. L_2 med riktningskoefficienter är k_1 resp. k_2, gäller

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

Exempel

- Använd definitionen av derivata för att bestämma $f'(2)$ då $f(x) = x^2 + 2$.
- Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan

$$y = x^2 + 2$$

i den punkt på kurvan som har x-koordinaten 2.

Differentialer

Ibland (t.ex. vid laborativa moment) är man intresserad av att undersöka vad som händer med funktionsvärdet för en funktion $f(x)$, för en ”liten” förändring av x.

Anta att $y = f(x)$ är en deriverbar funktion. Hur påverkas y-värdet då x-värdet förändras från x till $x + \Delta x$?

Vi beskriver förändringen Δy **längs funktionskurvan $y = f(x)$**:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Med utgångspunkt från derivatans definition kan vi säga följande:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad .$$

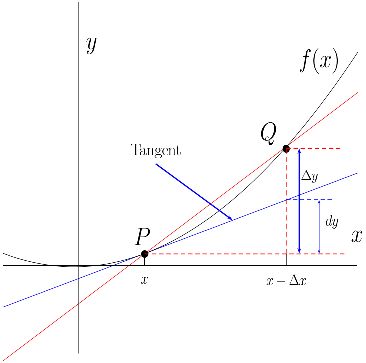
För ”små” värden Δx gäller tydligen

$$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x \quad .$$

Differential

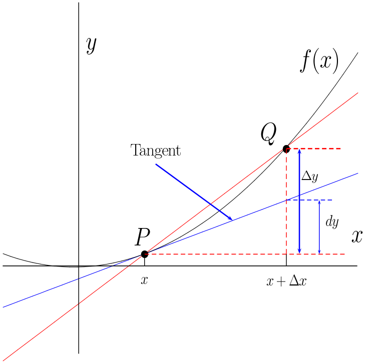
Detta betyder geometriskt, att vi approximerar den *verkliga* förändringen Δy med förändringen *längs tangenten* till $y = f(x)$.

Uttrycket $f'(x) \cdot \Delta x$ betecknas ofta dy och kallas *differentialen* av f.



Anmärkning

- Δy är förändringen i y-värde **längs kurvan**.
- dy är förändringen i y- värde **längs tangenten**.



Avslutande exempel

Antag att $f(x) = x^2$. Låt punkten P ha x-koordinaten 1. Bestäm

- Δy,
- dy,

om vi antar att $\Delta x = 0,01$.

Läs och lös på egen hand

Poiseuilles lag beskriver vätskeflödet F (liter/min) av en vätska genom ett cylindriskt rör med radien r. Flödet ges av

$$F = kr^4 \quad .$$

Bestäm approximativt hur stor procentuell ökning som behövs hos radien för att flödet skall ökas med 10%.

Lösningsförslag–tjuvtitta inte

Vi söker $\Delta r/r$ då $\Delta F/F = 0.10$.

$$\Delta F = \frac{\Delta F}{\Delta r}\Delta r \approx \frac{dF}{dr} \cdot \Delta r = F'(r) \cdot \Delta r.$$

En smula modifieringar ger till slut

$$\frac{\Delta F}{F} = 0.1 \approx \frac{F'(r) \cdot \Delta r}{F} = \frac{4kr^3 \cdot \Delta r}{kr^4} = 4\frac{\Delta r}{r} \quad .$$

Uppenbarligen måste radien ökas med ungefär 2.5%.

Att fundera på. . .

Låt $f(x) = \sqrt{x}$. Använd definitionen av derivata för att bestämma $f'(1)$.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} =$$ ((etc. . . Fullborda på egen hand))