M0038M Differentialkalkyl, Lekt 17, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Repetition Lekt 16

Uppskatta $(8.2)^{1/3}$ genom att använda differentialer. Svara på bråkform.

Deriveringsregler

Nu skall vi utöka vår verktygslåda med några viktiga instrument, deriveringsreglerna. Reglerna har sitt ursprung i derivatans definition och är sannolikt kända från gymnasiet.

Vi visar principen i några exempel. Vi följer en konvention att ersätta Δx med bokstaven h.

Exempel

Derivera $f(x) = kx + m$.

Enligt derivatans definition:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Vi betraktar ändringskvoten

$$\frac{k(x+h) + m - (kx+m)}{h} \quad .$$

Vi förenklar täljaren och får $\dfrac{kh}{h}$.

Vi dividerar med h i täljare och nämnare och ändringskvoten får värdet k.

Vi låter $h \to 0$, vilket medför att ändringskvoten kommer att närma sig värdet k, som i sin tur innebär att derivatan av $f(x) = kx + m$ är k.

Exempel

Derivera $f(x) = x^2$.

Enligt derivatans definition:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Vi betraktar ändringskvoten

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \quad .$$

Efter förenkling av täljaren får vi

$$\frac{2xh + h^2}{h} \quad .$$

Vi dividerar med h i täljare och nämnare och ändringskvoten får värdet $2x + h$.

Vi låter $h \to 0$, vilket medför att ändringskvoten kommer att närma sig värdet $2x$, vilket innebär att derivatan av $f(x) = x^2$ är $2x$.

Så kan vi fortsätta. Vi kommer så småningom fram till följande deriveringsregel:

Definition

Antag att $f(x) = x^n$, där $n > 0$ är ett heltal. Då gäller:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad .$$

Additionsregeln

För de deriverbara funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ gäller:

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x) \quad .$$

Exempel

Derivera $f(x) = x + x^2$ med derivatans definition.

Anm Detta exempel försöker med konkreta funktioner verifiera additionsregeln.

Lösningsförslag

Enligt derivatans definition:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Vi betraktar ändringskvoten

$$\frac{x + h + (x+h)^2 - (x + x^2)}{h} \quad .$$

Vi förenklar och gör termuppdelning:

$$\frac{x+h-x}{h} + \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \quad .$$

Respektive term är ändringskvoter. När $h \to 0$, medför detta att första termen går mot 1, medan andra termen går mot $2x$.

Konsekvensen av detta är, att *derivatan av en summa är summan av derivatorna*.

Exempel Derivera $f(x) = 2 + 3x + 4x^2$.

Produktregeln

Derivatan $p'(x)$ av en produkt $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ är första faktorns derivata gånger andra faktorn plus första faktorn gånger andra faktorns derivata:

$$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Exempel Derivera $p(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$.

Kvotregeln

Om

- $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$ och
- $f'(x)$ resp. $g'(x)$ existerar

så är

$$k'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Exempel Derivera $k(x) = \dfrac{2x+3}{5x^2 - 2x}$.

Anmärkning

- Produktregeln är litet knepigare att visa och tas därför utan härledning.
- Kvotregeln kan härledas med produktregeln och kedjeregeln, en deriveringsregel för sammansatta funktioner vi strax ska beröra. Försök att genomföra denna härledning.

Derivatan av trigonometriska funktioner

För att kunna härleda derivatan till $f(x) = \sin x$, måste vi använda ett viktigt standardgränsvärde vi tidigare har stiftat bekantskap med.

För alla reella tal $x \neq 0$ gäller:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{(Standardgränsvärde 3.11 (a))}$$

Derivatan av $f(x) = \sin x$

Enligt derivatans definition:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}.$$

Additionsformeln för sinus ger

$$-\sin x \cdot \frac{1 - \cos h}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \to$$

$$\to (-\sin x) \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x, \quad \text{då } h \to 0$$

Fortsättning

$$\frac{\sin h}{h} \to 1 \quad \text{då } h \to 0$$

$$\frac{1-\cos h}{h} = \frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)} = \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{1+\cos h} \to 1 \cdot 0 = 0 \quad \text{då } h \to 0$$

Sammanfattning

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \cos x.$$

Derivatan av $f(x) = \cos x$

Analogt med tidigare resonemang:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}.$$

Additionsformeln för cosinus ger

$$\cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \to$$

$$\to (\cos x) \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x, \quad \text{då } h \to 0$$

Sammanfattning

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = -\sin x.$$

Derivatan av $f(x) = \tan x$

Vi betraktar tangensfunktionen som en kvot mellan sinus- och cosinusfunktionerna.

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \overbrace{=}^{\text{kvotregeln}}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{\text{Trig. ettan}}}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad .$$

Sammanfattning

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x,$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x,$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$

Att derivera sammansatta funktioner

Vi ska härnäst derivera sammansatta funktioner. Låt oss försöka derivera

$$f(x) = (x^2 + 3)^4 \tag{1}$$

med olika ansatser.

Lösningsförslag

Ansats 1

$$(x^2+3)^4 = \left((x^2+3)^2\right)^2 = \left(x^4+6x^2+9\right)^2 = \ldots =$$
$$= x^8+12x^6+54x^4+108x^2+81.$$

Termvis derivering med kända räkneregler:

$$f'(x) = 8x^7+72x^5+216x^3+216x = 8x(x^6+9x^4+27x^2+27).$$

Med högre potenser blir uttrycket besvärligt att hantera. Det finns ett enklare arbetssätt.

Ansats 2: Yttre och inre funktion

Hur deriverar vi funktionen (1) med en enklare metod? Denna funktion är *sammansatt* av två funktioner, andragradspolynomet $x^2 + 3$ och en fjärdepotensfunktion.

Låt oss sätta $y = f(u) = u^4$ och $u = g(x) = x^2 + 3$. Detta ger

$$y = f(g(x)) = (g(x))^4 = (x^2 + 3)^4.$$

Funktionen y är sammansatt av en *yttre funktion* f och en *inre funktion* g.

Exempel

Funktion	Yttre	Inre
$y = \ln(2x)$	$y = \ln u$	$u = 2x$
$y = \mathrm{e}^{-4x}$	$y = \mathrm{e}^{u}$	$u = -4x$
$y = \ln(x^2 + 5)$	?	?
$y = (3x - 6)^3$	$y = u^3$	$u = 3x - 6$
$y = \mathrm{e}^{x^2}$	?	?

Kedjeregeln

När vi deriverar en sammansatt funktion, använder vi en speciell räkneregel, *kedjeregeln*:

Om g är deriverbar i x och f är deriverbar i $u = g(x)$ är

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) &= f'(u)\cdot g'(x) = \\ &= \underbrace{f'(g(x))}_{\text{Yttre derivata}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Inre derivata}} \end{aligned}$$

Minnesregel – ej bevis

Antag att $y = f(u)$, där $u = g(x)$. Vi använder beteckningarna

$$\frac{du}{dx} = g'(x)\ ,\ \frac{dy}{du} = f'(u) \text{ samt } \frac{dy}{dx} = f'(g(x)).$$

Då kan kedjeregeln skrivas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Vi återvänder till deriveringen av funktionen (1). Sätt $y = f(u) = u^4$ och $g(x) = x^2 + 3$. Vi räknar en smula och får

$$f'(u) = 4u^3 \text{ samt } g'(x) = 2x.$$

Kedjeregeln:

$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 4(x^2 + 3)^3 \cdot 2x.$$

En kontroll visar att allt stämmer. Utför denna kontroll som nyttig övning.

Anmärkning

- Kom ihåg att svara med ett uttryck som beror på x, eftersom y beror på x.
- När man har blivit van med sammansatta funktioner, behöver man inte tabellera yttre och inre funktioner, utan man gör kalkylerna direkt.

Avslutande exempel

Bestäm

- $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+x^5)^2}}\right)$
- Derivera $f(x) = \cos 3x$.
- Derivera $f(x) = 4\sin 5x$.
- Derivera $f(x) = \cos^3 x$.

Läs och lös på egen hand

Derivera

1. $y = \ln 3x,$
2. $y = \mathrm{e}^{-0{,}03x},$
3. $y = 5(2x+3)^4.$

Lösningsförslag

Vi gör en tabell för de tre funktionerna:

Funktion	Yttre	Inre
$y = \ln 3x$	$y = \ln u$	$u = 3x$
$y = \mathrm{e}^{-0,03x}$	$y = \mathrm{e}^{u}$	$u = -0,03x$
$y = 5(2x+3)^4$	$y = 5u^4$	$u = 2x + 3$

Vi tillämpar kedjeregeln $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{u} \cdot 3 = \dfrac{1}{x}$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \mathrm{e}^{u} \cdot (-0,03) = -0,03\,\mathrm{e}^{-0,03x}$
3. $\dfrac{dy}{dx} = 20u^3 \cdot 2 = 40(2x+3)^3$

Att fundera på...

Låt f och g vara två deriverbara funktioner så att

$$f'(x) = g(x) \text{ och } g'(x) = -f(x).$$

Antag dessutom att

$$H(x) = [f(x)]^2 + [g(x)]^2 .$$

Bestäm $H'(x)$. Slutsats?

Mer funderingar. . .

Bestäm gränsvärdet

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} \quad (\text{Tips: } \cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right))$$
- Visa att $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = -\sin x$ genom att utnyttja att $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Tillämpa kedjeregeln.

Läs och lös på egen hand

Derivera med derivatans definition $f(x) = x^3$.

Lösningsförslag(tjuvtitta inte)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Vi betraktar ändringskvoten

$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \quad .$$

Vi förenklar täljaren och får efter litet arbete

$$\frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \quad .$$

Vi dividerar med h i täljare och nämnare och ändringskvoten får värdet $3x^2 + 3xh + h^2$.

Låt $h \to 0$, vilket medför att ändringskvoten kommer att närma sig värdet $3x^2$, vilket innebär att derivatan av $f(x) = x^3$ är $3x^2$.