M0038M Differentialkalkyl, Lekt 18, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Inför lektion 20

- Ladda ner övningsmaterial ("Derivator från α till ω") från Fronter.
- Försök ta fram så många av derivatorna du kan innan lektion 20.
- Under lektion 20 räknas alla uppgifterna i övningsmaterialet.

Repetition Lekt 17

Bestäm

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)\bigg|_{t=-2}$$

Implicit derivering–ett användbart hantverk

Funktionen $y = f(x)$ definieras genom att uttrycka den beroende variabeln *explicit* i termer av den oberoende variabeln, exempelvis

- $y = (\sin x - 1)^3$
- $y = x^2 \cdot \tan^2 x$

Betrakta uttrycket

$$3x^3y - 4y - 2x + 1 = 0 \quad . \tag{1}$$

I (1) definieras y *implicit* som funktion av x. Det brukar beskrivas generellt på formen

$$F(x, y(x)) = 0 \quad .$$

Anmärkning

$F(x, y) = 0$ är deriverbar om

- $F(x, y)$ är kontinuerlig,
- dF/dx resp. dF/dy är kontinuerliga,
- Derivatan med avseende på y är skild från noll.

Låt oss nu derivera (1).

Alt. 1 När vi deriverar (1), kan vi *ibland* lösa ut y:

$$y = \frac{2x - 1}{3x^3 - 4}.$$

y' kan vi sedan bestämma med kvotregeln.

Alt. 2 Vi deriverar bägge led i (1) implicit, med avseende på x – utan att först lösa ut y. Glöm ej att $y = y(x)$.

Exempel

- Använd implicit derivering för att bestämma dy/dx:

$$\cos(x-y) = (2x+1)^3\, y.$$

Anmärkning När används implicit derivering?

SVAR: När det är obekvämt (eller omöjligt) att först lösa ut y som funktion av x och därefter derivera ”som vanligt”.

Exempel

Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan

- $$x + 2y + 1 = \frac{y^2}{x-1} \quad \text{i punkten } (2, -1).$$

Bevis av produktregeln

Med hjälp av implicit derivering, kan produktregeln enkelt härledas.

$$y = f(x) \cdot g(x) \quad \text{(Logaritmera bägge led)}$$

$$\ln y = \ln(f(x) \cdot g(x)) = \ln f(x) + \ln g(x) \quad \text{(Derivera implicit)}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$y' = y\left(\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}\right) =$$

$$= f(x) \cdot g(x)\left(\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}\right) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Inversens derivata

Antag att $y = f^{-1}(x)$. Detta innebär att

$$x = f(y). \tag{2}$$

Vi är intresserade av inversens derivata, dy/dx, och provar med att derivera (2) implicit m.a.p. x:

$$1 = f'(y) \cdot \frac{dy}{dx} \quad (\text{Lös ut } dy/dx)$$

varav

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Vi sammanfattar:

Sats utan bevis

Antag att $x = f(y)$ är en omvändbar funktion, deriverbar i $y = y_0$. Då är inversen $y = f^{-1}(x)$ deriverbar i $x_0 = f(y_0)$ och

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} \quad ,$$

förutsatt att $f'(y_0) \neq 0$.

Minnesregel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} \quad .$$

Exempel

Låt $f(x) = x^3 + 3x$. Bestäm $\left(f^{-1}\right)'(4)$.

Lösningsförslag

Om $y = f^{-1}(x)$, är $x = f(y) = y^3 + 3y$. Implicit derivering m.a.p. x:

$$1 = y'(3y^2 + 3) \Rightarrow y' = \frac{1}{3y^2 + 3} \quad .$$

För att kunna bestämma $\left(f^{-1}\right)'(4)$, måste vi först bestämma y_0.

Krav på y_0: $f(y_0)$ ska ge x-värdet 4, dvs $f(y_0) = 4$.

Vi noterar att

$$y_0 = f^{-1}(4) \Leftrightarrow f(y_0) = 4 \quad (\text{dvs. } y_0^3 + 3y_0 = 4).$$

Genom prövning finner vi ganska snart att $y_0 = 1$ är enda möjliga kandidaten.

Minns att y är omvändbar.
Avslutningsvis:

$$\left(f^{-1}\right)'(4) = \left.\frac{1}{3y_0^2 + 3}\right|_{y_0=1} = \frac{1}{6} \quad .$$

Derivatan av exp- och log-funktioner

Under en tidigare lektion gjorde vi en intressant iakttagelse.

Vi betraktade exponentialfunktionen $f(x) = b^x$, $b > 0, b \neq 1$ och analyserade ändringskvoten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{b^{x+h} - b^x}{h} = b^x \cdot \frac{b^h - 1}{h} \quad .$$

Vad hände då h blev mindre och mindre? För ett b-värde någonstans mellan 2,6 och 2,75 tycktes kvoten $\dfrac{b^h - 1}{h}$ allt mer närma sig värdet 1.

Vi kom fram till att $b = e \approx 2.7183$, dvs.

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

vilket vi nog känner igen som ett av standardgränsvärdena på s. 145 FN.

Standardgränsvärdet 3.11 (d)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Vår tidigare utförda analys mynnar ut i en viktig deriveringsregel.

Deriveringsregel

För $f(x) = e^x$ gäller att

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x.$$

Minnesregel: Exponentialfunktionen är sin egen derivata.

Derivatan av $\ln x$

Eftersom exponentialfunktionen och den naturliga logaritmfunktionen är varandras inverser kan vi, enligt dagens genomgång, skriva:

Om $y = f^{-1}(x) = \ln x$, är $x = f(y) = e^y$. Implicit derivering m.a.p. x:

$$1 = e^y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \quad .$$

Deriveringsregel

För $f(x) = \ln x$ gäller att

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}, \qquad x > 0. \tag{3}$$

Viktigt exempel

Visa att

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Lösningsförslag

$x > 0$. Då gäller $\ln|x| = \ln x$. Då gäller enligt (3) att

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}.$$

$x < 0$. Då gäller $\ln|x| = \ln(-x)$. Med kedjeregeln blir

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln(-x) = (-1)\cdot\frac{1}{(-x)} = \frac{1}{x},$$

och vi är klara.

Anmärkning

Med derivatans definition får vi (vi antar att $f(x) = \ln x$):

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \overbrace{\ln(1)}^{=0}}{h} = (\text{Deriv. regel}) = 1.$$

Detta är inget annat än ett standardgränsvärde.

Standardgränsvärdet 3.11 (c)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Arcusfunktionernas derivator

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Härledning av den första derivatan

Sätt $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \ , \ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

$$1 = y' \cdot \cos y \quad \text{(Implicit derivering)}$$

$$y' = \frac{1}{\underbrace{\cos y}_{>0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad .$$

Viktig övning: Härled på egen hand de övriga två derivatorna. Gör analoga resonemang i stil med ovanstående.

Avslutande exempel

Derivera

- $f(x) = \arcsin(2x)$
- $g(x) = \arctan\sqrt{x^2 - 1}$
- På egen hand Visa att

$$\arctan x = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right), \text{ för } x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Lösningsskiss, pkt 3.

Omskrivning. Vi sätter

$$f(x) = \arctan x - \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

och genom att derivera visar vi att $f = C$.

Derivera.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)}} \cdot \\ \cdot \underbrace{\left(\frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\right)}_{\text{Inre derivata}}$$

Vi konstaterar efter en del manipuleringar: $f'(x) = 0$ dvs. $f = C$.

Best. av C. Bestäm t.ex. $f(0) = \ldots = 0$. Identiteten (4) är sann, och vi är klara.

Att fundera på. . .

Visa att $\dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Läs och lös på egen hand

Låt $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$, $x > 0$.
Bestäm $\left(f^{-1}\right)'(18)$.

Lösningsförslag–Tjuvkika inte

Metod 1 Antag att $y = f^{-1}(x)$, vilket betyder att

$$x = f(y) = y^2 + \sqrt{y}.$$

Implicit derivering m.a.p. x:

$$1 = 2yy' + \frac{y'}{2\sqrt{y}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}} \quad .$$

Bestämning av $\left(f^{-1}\right)'(18)$

Vi inleder med att bestämma y_0 *sådant att* $f(y_0) = 18$, och noterar att

$$y_0 = f^{-1}(18) \Leftrightarrow f(y_0) = y_0^2 + \sqrt{y_0} = 18$$

Genom prövning får vi att $y_0 = 4$ är enda möjliga kandidaten.

$$\left(f^{-1}\right)'(18) = \left.\frac{1}{2y_0 + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}}\right|_{y_0=4} = \frac{4}{33} \quad .$$

Metod 2

Vi deriverar $f(x)$.

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{$*$}$$

Om $y = f^{-1}(x)$, är $x = f(y) = \dfrac{4y^3}{y^2+1}$, och

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} \overbrace{=}^{(*)} \frac{1}{2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}} \quad .$$

O.s.v. enligt Metod 1.

Att fundera på. . .

Betrakta den omvändbara funktionen $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 4x$. Bestäm $(f^{-1})'(2)$.