M0038M Differentialkalkyl, Lekt 22, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

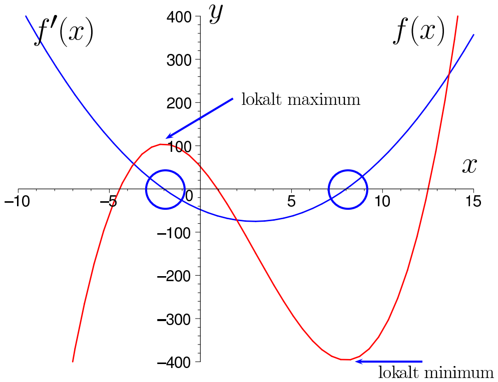
Lokala extrempunkter

Vi repeterar:

Antag att funktionen $f(x)$ är deriverbar i ett intervall I. Då gäller:

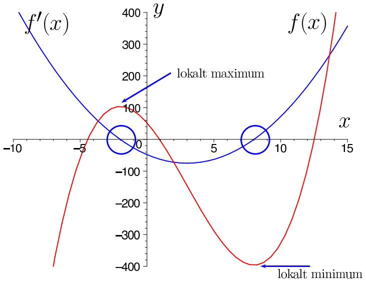
- $f'(x) > 0$ för alla $x \in I \Rightarrow f(x)$ är *strängt växande* i I,
- $f'(x) < 0$ för alla $x \in I \Rightarrow f(x)$ är *strängt avtagande* i I,
- $f'(x) = 0$ för alla $x \in I \Rightarrow f(x)$ är *konstant* i I.

I följande figur ser vi graferna till funktionerna $y = f(x)$ samt $y = f'(x)$.

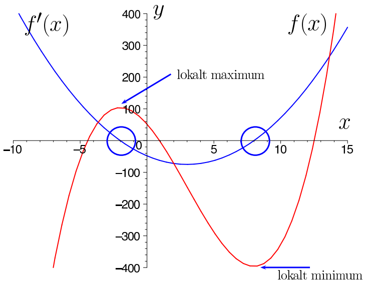


I punkten $x = -2$ har funktionen ett *lokalt maximivärde*. Vad gäller för funktionens värden i ett symmetriskt intervall "nära" $x = -2$?

Vi noterar att funktionsvärdet är lägre än funktionsvärdet $f(-2)$. Analogt kan vi konstatera att i en *omgivning* till den *lokala minimipunkten* $x = 8$, är funktionsvärdena större än funktionsvärdet $f(8)$.



I figuren har vi också avbildat $y = f'(x)$ (blå graf), där vi har ringat in de intressanta x-värdena -2 respektive 8.
Vad händer med $f'(x)$ "nära" dessa punkter? Vi noterar att *derivatan växlar tecken* i dessa punkter. Denna egenskap knyter vi nu samman med egenskaperna hos $f(x)$.



Derivatans teckenväxling

Derivatans tecken säger oss viktiga saker om hur funktionen $f(x)$ beter sig.

För derivatans teckenväxling i $x = -2$ resp. $x = 8$ gäller:

x	$x < -2$	$x = -2$	$x > -2$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

x	$x < 8$	$x = 8$	$x > 8$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

Definition

Om $f(x)$ är en funktion som har ett lokalt maximum eller lokalt minimum i en punkt x_0, gäller att $f'(x_0) = 0$. Punkten $x = x_0$ kallas en *stationär (kritisk) punkt*. För derivatans teckenväxling i $x = x_0$ gäller:

x	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

Exempel

Beräkna eventuella maximi- eller minimivärden till

- $f(x) = x^2 - 5x + 3.$
- $f(x) = x^3 - 3x.$

Terasspunkt

En stationär punkt behöver inte vara en lokal extrempunkt. Vi betraktar följande exempel.

Exempel Antag att $f(x) = x^3$. Bestäm samtliga stationära punkter. Vad kan sägas om derivatans teckenväxling i de stationära punkterna?

Lösningsförslag

- $f(x) = x^3$.
- $f'(x) = 3x^2$.
- $f'(x) = 0$ ger $x = 0$ (dubbelrot).
- Derivatans tecken:

x	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Terasspunkt

Vi konstaterar: Derivatan är positiv $\forall x \neq 0$, och är noll för $x = 0$. $f(0) = 0$ är varken lokalt maximi- eller minimivärde. Punkten $x = 0$ kallas *terasspunkt*.

Kurvritning m.m.

Att analysera funktioner hör till de vanligaste uppgifterna i en grundläggande kurs i matematik. Till det behövs en hel del verktyg. Vi skall titta litet närmare på några av dem.

En *asymptot* (grek. *asýmptatos*, 'icke sammanfallande') är en rät linje vilken kurvan $y = f(x)$ närmar sig obegränsat utan att sammanfalla med denna.

Asymptotbestämning är en vanligt förekommande teknik.

Likaså tillhör undersökningen av *lokala egenskaper* något en matematikstudent möter under sitt första år.

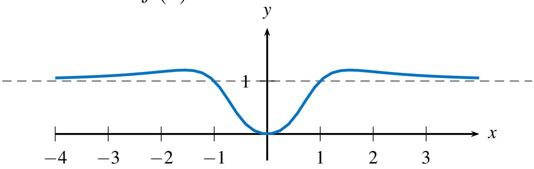
Tre typer av asymptoter

För funktionen $y = f(x)$ gäller (a är ett reellt tal): Linjen $y = a$ är en *vågrät asymptot* om

$$f(x) \to a \text{ då } x \to \infty$$

eller

$$f(x) \to a \text{ då } x \to -\infty$$

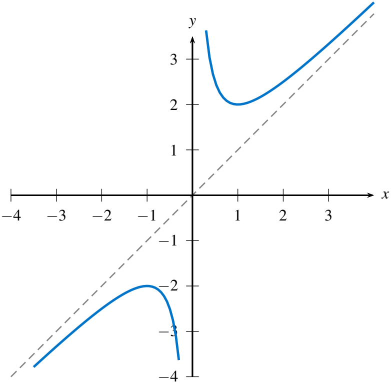


Kurvan $y = f(x)$ har den *sneda asymptoten* $y = kx + m$ om

$$f(x) - (kx + m) \to 0 \text{ då } x \to \infty$$

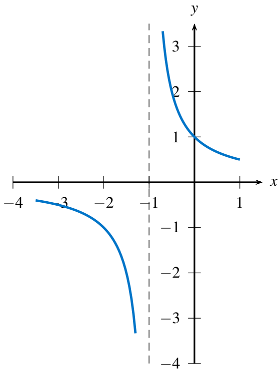
eller

$$f(x) - (kx + m) \to 0 \text{ då } x \to -\infty$$



$x = a$ är en *lodrät asymptot* om

$$f(x) \to \infty \text{ eller}$$
$$f(x) \to -\infty$$
$$\text{då } x \to a^+ \text{ eller } x \to a^-.$$



Exempel

Skissa grafen till

$$y = \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 + 2x + 1} \tag{1}$$

med angivande av ev. asymptoter samt ev. lokala extrempunkter.

Lösningsförslag: När vi har en rationell funktion, kan vi tämligen enkelt få fram eventuella asymptoter.

Vi börjar dock med en annan analys, nämligen undersökningen av lokala extrempunkter.

Lokala extrema

Derivering av (1) ger

$$y' = \frac{(3x^2 + 6x)(x^2 + 2x + 1) - (x^3 + 3x^2 - 4)(2x + 2)}{(x + 1)^4}$$

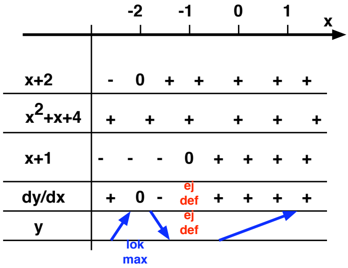
Faktorisera (om möjligt) y'. Detta är en viktig del i arbetsgången.

$$y' = \frac{(x + 2)(x^2 + x + 4)}{(x + 1)^3}$$

Teckenstudera den faktoriserade y'.

Teckentabell

Lokal maximipunkt: $(-2, 0)$.



Finns sneda asymptoter?

Som vi tidigare nämnde, finns ett enkelt sätt att göra asymptotbestämning när vi har att göra med rationella funktioner, nämligen polynomdivision.

Eftersom täljarpolynomets gradtal är **en enhet större** än nämnarpolynomet, har vi anledning att misstänka att en sned asymptot existerar.

Vi polynomdividerar.

Polynomdivision

$$
\begin{array}{r|rrrr}
\multicolumn{1}{r}{} & & & x & +\,1\\ \cline{2-5}
x^2+2x+1 & x^3 & +\,3x^2 & & -\,4\\
 & -\,x^3 & -\,2x^2 & -\,x & \\ \cline{2-4}
 & & x^2 & -\,x & -\,4\\
 & & -\,x^2 & -\,2x & -\,1\\ \cline{3-5}
 & & & -\,3x & -\,5
\end{array}
$$

Resultat

Polynomdivisionen gav följande resultat:

$$f(x) = \underbrace{x+1}_{kvot} - \underbrace{\frac{3x+5}{x^2+2x+1}}_{rest}$$

Resttermen blir försumbar för stora $|x|$, dvs

$$f(x) - (x+1) \to 0 \text{ då } x \to \pm\infty.$$

Alltså är $y = x + 1$ en *sned asymptot* då $x \to \pm\infty$.

Anmärkning

Vi noterar också att grafen till $f(x)$ närmar sig den sneda asymptoten underifrån för ”stora positiva” x, medan grafen närmar sig den sneda asymptoten ovanifrån för ”stora negativa” x.

Finns lodräta asymptoter?

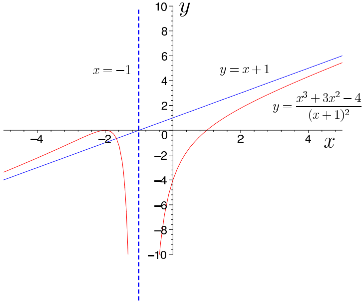
Vi ser snabbt att

$$f(x) \to -\infty \text{ såväl för } x \to -1^+ \text{ som för } x \to -1^-.$$

dvs. linjen $x = -1$ är en *lodrät asymptot*.

Kurvskiss

Med ledning av vår analys kan vi till sist skissa kurvan $y = f(x)$.



Anmärkning

Kurvan $y = f(x)$ har den *sneda asymptoten* $y = kx + m$ om det gäller att

$$f(x) - (kx + m) \to 0 \text{ då } |x| \to \infty$$

Detta är liktydigt med att

$$\frac{f(x)}{x} \to k \text{ då } |x| \to \infty \tag{2}$$

och

$$f(x) - kx \to m \text{ då } |x| \to \infty \tag{3}$$

Avslutande exempel

Bestäm eventuella asymptoter, eventuella lokala extrempunkter samt rita grafen till

$$f(x) = \frac{|x|(x^2-4)}{x^2-1}$$

Lösningsskiss

Derivatan. För $x > 0$ gäller

$$f(x) = \frac{x(x^2-4)}{x^2-1}, \quad f'(x) = \frac{x^4+x^2+4}{x^4-2\,x^2+1} = \frac{(x^2+1/2)^2+15/4}{(x^2-1)^2}$$

Vi konstaterar: $f'(x) > 0,$ för $x \neq 1$

För $x < 0$ gäller

$$f(x) = \frac{-x(x^2-4)}{x^2-1}, \quad f'(x) = -\frac{x^4+x^2+4}{x^4-2\,x^2+1} = -\frac{(x^2+1/2)^2+15/4}{(x^2-1)^2}$$

Vi konstaterar: $f'(x) < 0,$ för $x \neq -1$

Asymptoter.

Vertikala $x = \pm 1$ (Nämnaren = 0)

Sneda För $x > 0$ får vi

$$f(x) = \frac{x(x^2-4)}{x^2-1} = x - \frac{3x}{x^2-1} \quad \text{(Polynomdiv.)}$$

Vi konstaterar: Sned asymptot: $y = x$

För $x < 0$ får vi

$$f(x) = \frac{-x(x^2-4)}{x^2-1} = -x + \frac{3x}{x^2-1}$$

Vi konstaterar: Sned asymptot: $y = -x$

Lokala extrempunkter.

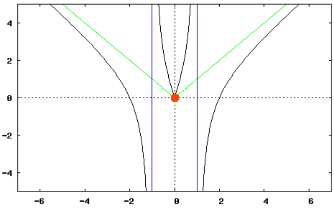
Lokalt minimum för $x = 0$. (Hörn, $f(x)$ saknar derivata)

Graf

Graf,

$$f(x) = \frac{|x|(x^2 - 4)}{x^2 - 1}$$

med sina asymptoter och lokalt minimivärde



På egen hand

Bestäm eventuella asymptoter, eventuella lokala extrempunkter samt rita grafen till

$$f(x) = x - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right), \quad x > -1.$$

Graf

Graf,

$$f(x) = x - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

med sin asymptot.