M0038M Differentialkalkyl, Lekt 25, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Repetition Lekt 24

Undersök om $f(x) = e^x + \cos 2x - \sin x$ har lokalt maximum eller lokalt minimum i $x = 0$.

Numerisk lösning av icke-linjära ekvationer

Vi ska i denna lektion använda derivatan som verktyg vid numerisk ekvationslösning.

Iteration är ett kraftfullt hjälpmedel vid numerisk lösning av icke-linjära problem. Vi stötte på begreppet under Lekt 15.

Utgående från ett startvärde x_0 beräknar vi en talföljd

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

Iterationerna kan avbrytas när vi uppnått önskad noggrannhet.

Newton-Raphsons metod

Den kanske mest kända iterativa metoden kallas **Newton-Raphsons metod**.

Med utgångspunkt utifrån ett startvärde x_0 i närheten av roten, bildar man nya approximationer $x_1, x_2, \ldots$ genom rekursionsformeln

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad \text{där}$$
$$h = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad , k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Anmärkning

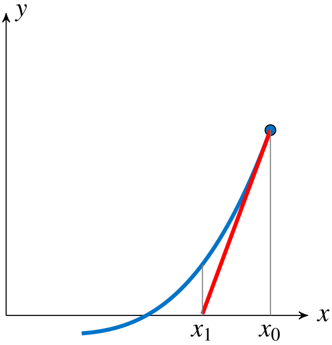
Newton-Raphsons metod är en utmärkt tillämpning av differentialkalkylen.

Den grundläggande tankegången är att man lokalt approximerar en icke-linjär, ofta komplicerad funktion, med en linjär funktion – tangenten.

Förklaringsmodell

Drag tangenten till $y = f(x)$ i punkten $(x_0, f(x_0))$. Dess ekvation:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) \quad .$$

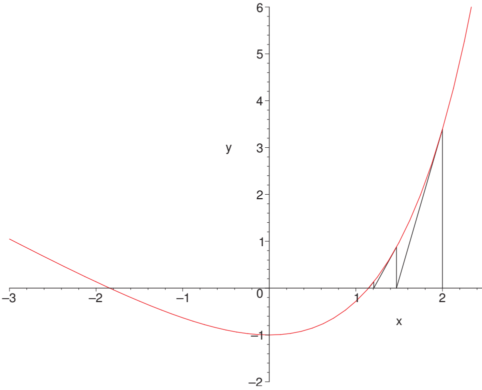


Fråga: Var skär denna tangent x-axeln?

Iterativ process

Tangenten i punkten $(x_0, f(x_0))$ skär x-axeln i $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Detta x-värde kallar vi x_1. Vi upprepar proceduren.

Tangenten i punkten $(x_1, f(x_1))$ skär x-axeln i $x = x_2$ o.s.v.



Exempel

Lös ekvationen $\mathrm{e}^{x}-x-2=0$. Sätt $x_0=2$.

Lösningsförslag

Vi gör en tabell med följande utseende:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**h=-f/f'**
2	3,389056099	6,389056099	-0,530447072
1,469552928	0,877738227	3,347291155	-0,262223448
1,207329481	0,137211573	2,344541054	-0,058523852
1,148805629	0,005617478	2,154423106	-0,002607416
1,146198212	1,07135E-05	2,146208926	-4,99185E-06

Avslutande exempel

Bestäm den positiva roten till

$$\sin x - \frac{x^2}{4} = 0$$

Sätt $x_0 = 1.5$. Gör 4 iterationer.

Lösningsförslag

x	f(x)	f'(x)	h=-f/f'
1,5	0,434994987	-0,679262798	0,640392772
2,140392772	-0,303201628	-1,609488638	-0,188383826
1,952008946	-0,024370564	-1,348050787	-0,018078372
1,933930574	-0,000233752	-1,322171117	-0,000176794
1,93375378	-2,24233E-08	-1,321917449	-1,69627E-08

Den sökta roten är ungefär 1.93375 med 5 decimaler.

Intressant exempel: Läs på egen hand

Lös ekvationen

$$\underbrace{x^3 + 3x^2 + 2.9999x + 0.9999}_{f(x)} = 0.$$

Lösningsförslag

Med prövning får vi en rot, nämligen $x = -1$. Övriga rötter ligger mellan -2 och 0. Vi använder startvärdet $x_0 = 0$.

x	f(x)	f'(x)	h
0	0,9999	2,9999	-0,33331111
-0,33331111	0,296259259	1,333322227	-0,222196295
-0,555507406	0,087775582	0,592621	-0,148114195
-0,703621601	0,026004287	0,263420467	-0,098717792
-0,802339393	0,007702778	0,117109147	-0,065774347
-0,86811374	0,002280839	0,052081957	-0,043793268
-0,911907008	0,000674825	0,023181126	-0,029110984
-0,941017991	0,000199293	0,010336632	-0,019280262
-0,960298253	5,86089E-05	0,004628686	-0,012662094
-0,972960347	1,70659E-05	0,002093428	-0,008152121
-0,981112468	4,84916E-06	0,000970217	-0,004998021
-0,98611049	1,29059E-06	0,000478755	-0,002695723
-0,988806213	2,83212E-07	0,000275903	-0,001026494

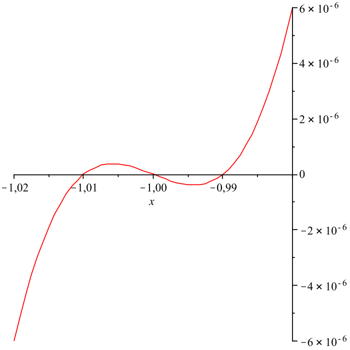
Vår sökta rot har värdet $x \approx -0.99$. Den återstående roten söker vi med startvärdet $x_0 = -1.5$.

x	f(x)	f'(x)	h
-1,5	-0,12495	0,7499	0,166622216
-1,333377784	-0,037018518	0,33332224	0,11105925
-1,222318534	-0,01096598	0,148176591	0,074006154
-1,14831238	-0,003247531	0,065889686	0,049287399
-1,099024981	-0,000961131	0,029317841	0,032783151
-1,06624183	-0,000284044	0,01306394	0,021742571
-1,044499259	-8,36668E-05	0,005840552	0,014325152
-1,030174107	-2,44554E-05	0,00263143	0,009293582
-1,020880525	-7,01578E-06	0,001207989	0,005807818
-1,015072708	-1,91705E-06	0,00058156	0,003296387
-1,011776321	-4,55529E-07	0,000316045	0,00144134
-1,010334981	-7,04002E-08	0,000220436	0,000319369
-1,010015612	-3,12982E-09	0,000200937	1,55761E-05
-1,010000036	-7,28551E-12	0,000200002	3,64271E-08

Kommentarer

Den återstående roten blev $x \approx -1.01$.

Vi noterar att kurvan har en liten derivata nära roten, dvs. kurvan är flack kring roten. Det innebär att Newton-Raphsons metod konvergerar mycket långsamt mot den sökta roten. Här ligger alltså en svaghet i vår numeriska metod.



Grovbestämning: en metod att generera startvärdet x_0

Man kan grovbestämma rötterna med följande tankegång:

Om funktionen f är kontinuerlig i $a < x < b$ och $f(a)$ och $f(b)$ har olika tecken, så har ekvationen $f(x) = 0$ minst en rot i intervallet.

Definitionen har sin grund i Sats 3.9 s. 142 FN, en fundamental sats som beskriver egenskaper hos kontinuerliga funktioner.

Exempel

Visa att ekvationen

$$x^3 + 4x = 10$$

har en rot mellan 1 och 2.

Anm: Studera $f(x) = x^3 + 4x - 10$.

För den ambitiöse

Vi skall fördjupa vårt resonemang kring numeriska metoder för att lösa ekvationer på formen

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

vilket vi berörde under Lektion 15.

Vi skall försöka finna en rot α till (1) genom att generera en talföljd $\{x_r\}$, som uppfyller det rekursiva sambandet

Konvergens $\lim_{r\to\infty}\{x_r\} = \alpha$,

Beroende x_{r+1} beror av närmast föregående element i talföljden, nämligen x_r.

Vad vi behöver är en funktion $g(x)$ som uppfyller

$$x_{r+1} = g(x_r) \text{ , r=0,1,2,\dots} \tag{2}$$

givet ett startvärde x_0. En metod av typen (2), kallas fixpunktsmetod.

Definition

Om $f(x)$ är definierad på $[a,b]$ och $\alpha = f(\alpha)$, för något $\alpha \in [a,b]$, sägs funktionen $f(x)$ ha en **fixpunkt** $\alpha \in [a,b]$.

En fixpunktsmetod som löser (1), får vi genom att vi skriver om ekvationen (1) på formen (2).

Exempel

Vi skall lösa ekvationen $x = e^{-x}$ numeriskt med vår fixpunktsmetod (2). En körning med startvärdet 0.5 gav följande sekvens:

x(r)	x(r+1)=exp(-x(r))	x(r)	x(r+1)=exp(-x(r))
0,5	0,606531	0,568438	0,566409
0,606531	0,545239	0,566409	0,56756
0,545239	0,579703	0,56756	0,566907
0,579703	0,560065	0,566907	0,567277
0,560065	0,571172	0,567277	0,567067
0,571172	0,564863	0,567067	0,567186
0,564863	0,568438	0,567186	0,567119
0,567119			

Anmärkning

Vi noterar i första/tredje kolonnen att talföljden sakta men säkert konvergerar mot närmevärdet $\alpha \approx 0.567$. Det är ingen blixtsnabb konvergens, men å andra sidan behövs inga märkvärdiga kalkyler.

Ett (förhoppningsvis) intressant spörsmål uppenbarar sig: Vilka villkor krävs för att en fixpunktsmetod skall konvergera?

Låt oss återvända till (1) och betraktar

$$x_{r+1} - \alpha = g(x_r) - g(\alpha) = (x_r - \alpha)g'(c) \tag{3}$$

enligt medelvärdessatsen, där c ligger mellan x_r och α.
Antag att

$$|g'(x)| \leq L < 1 \text{ för alla } x. \tag{4}$$

Från (3) får vi att

$$|x_{r+1} - \alpha| \leq L|x_r - \alpha|, \tag{5}$$

Om vi ersätter x_r med x_{r-1}, x_{r-1} med x_{r-2}, osv., får vi

$$|x_{r+1} - \alpha| \leq L^r |x_0 - \alpha| \ , \ r \geq 0. \tag{6}$$

Eftersom $0 \leq L < 1$, betyder detta:

$$\lim_{r \to \infty} |x_r - \alpha| = 0.$$

Konvergensprincip

Vi beskriver konvergensprincipen för vår fixpunktsmetod:

Antag att iterationsmetoden (2) har fixpunkten α. Antag också att $|g'(x)| \leq L < 1$ för alla x i en liten omgivning I till α. Om det gäller att $x_0 \in I$ så gäller $\lim_{r \to \infty} x_r = \alpha$.

Anm Konvergensvillkoret är kort uttryckt $|g'(x)| < 1$, vilket vi antydde under Lektion 15.

Snabbare konvergens

Vi använder vår inledande frågeställning. Låt oss anta att vi äger en approximation x_n till roten α. Då får man enl. medelvärdessatsen att

$$f(\alpha)-f(x_n)=f'(c)(\alpha-x_n)\text{ , } c \text{ mellan } \alpha \text{ och } x_n. \tag{7}$$

Eftersom $f(\alpha)=0$, så ger (7) (Vi sätter $f'(\xi)\approx f'(x_n)$):

$$\alpha \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{8}$$

Detta ger oss en iterationsmetod, kallad **Newton-Raphsons metod**, som har fördelen att konvergera snabbt (åtminstone mot enkelrötter). Vi återvänder till vårt tidigare exempel.

x	f	fprim	korr
0,5	-0,17564	2,473082	0,07102
0,57102	0,010748	2,78082	-0,00386
0,567156	3,39E-05	2,763278	-1,2E-05
0,567143	3,41E-10	2,763223	-1,2E-10
0,567143	0	2,763223	0
0,567143	0	2,763223	0

Anmärkning

Vi har på ett fåtal steg fått sex korrekta decimaler. Konvergensen är mycket snabb. Dock kan man få konvergensproblem om derivatan är liten nära roten.

En flack kurva ger nästan alltid upphov till sämre (eller ingen) konvergens.

Exempel på numeriska problem

Ett problem är då en ekvation har flera nästan lika stora rötter. Lös ekvationen $f(x) = x^3 - 6.005x^2 + 12.02x - 8.02 = 0$.
Denna ekvation har rötterna 2 (dubbelrot) samt 2.005.
Vi använder Newton-Raphsons metod:

Lösningsförslag

x	f	fprim	korr
1	-1,005	3,01	0,333887
1,333887	-0,29778	1,337781	0,22259
1,556477	-0,08823	0,594572	0,148392
1,70487	-0,02614	0,264257	0,098926
1,803796	-0,00775	0,11745	0,065948
1,869744	-0,00229	0,052203	0,043961
1,913704	-0,00068	0,023204	0,0293
1,943004	-0,0002	0,010316	0,019523
1,962528	-6E-05	0,004587	0,013001
1,975529	-1,8E-05	0,002041	0,008646
1,984175	-5,2E-06	0,00091	0,005734

Forts.

x	f	fprim	korr
1,989909	-1,5E-06	0,000406	0,003781
1,99369	-4,5E-07	0,000183	0,002467
1,996157	-1,3E-07	8,27E-05	0,001579
1,997735	-3,7E-08	3,8E-05	0,00098
1,998715	-1E-08	1,78E-05	0,000583
1,999298	-2,8E-09	8,5E-06	0,000331
1,999629	-7,4E-10	4,13E-06	0,000179
1,999808	-1,9E-10	2,03E-06	9,42E-05
1,999902	-4,9E-11	1,01E-06	4,84E-05
1,999951	-1,2E-11	5E-07	2,45E-05
1,999975	-3,1E-12	2,5E-07	1,24E-05

Efter ett antal steg får vi att en rot är ungeför 1.9999. Noggrannheten är mycket sämre än i det tidigare exemplet.