

# M0038M Differentialkalkyl, Lekt 5, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

# Khan Academy

- Hemsida [www.khanacademy.org/](http://www.khanacademy.org/)
- "Students can make use of our extensive library of content, including interactive challenges, assessments, and videos from any computer with access to the web."
- Bra komplement till traditionell undervisning

Video om polynomdivision

Polynomial Division

$$\frac{2x+4}{2} = \frac{x+2}{1} = x+2$$

$$\begin{array}{r} x+2 \\ 2 \overline{) 2x+4} \\ \underline{-2x} \phantom{+4} \\ 4 \\ \underline{-4} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+3 \\ (x+2) \overline{) x^2+5x+6} \\ \underline{-(x^2+2x)} \phantom{+6} \\ 3x+6 \\ \underline{-(3x+6)} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{x^2+5x+6}{x+2} = \left( x+3 + \frac{0}{x+2} \right) = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)} + \frac{0}{(x+2)}$$

YouTube

# Lekt 4

- Lös ekvationen

$$\log_2 x + \log_2(x - 1) = 1$$

# Ekvationer med logaritmer

Ekvationen

$$(2x)^{\lg 2} = (3x)^{\lg 3}, \quad x > 0,$$

har en rationell rot. Bestäm denna.

# Lösningsförslag

$$(2x)^{\lg 2} = (3x)^{\lg 3} \quad (\text{Logaritmera bägge led+regler})$$

$$\lg(2) \cdot \lg(2x) = \lg(3) \cdot \lg(3x) \quad (\text{Bryt ut } \lg x)$$

$$\lg x(\lg 2 - \lg 3) = \lg^2 3 - \lg^2 2 \quad (\text{efter lite arbete})$$

$$\lg x = \frac{(\lg 3 - \lg 2)(\lg 3 + \lg 2)}{\lg 2 - \lg 3} = -(\lg 3 + \lg 2) = \underbrace{-\lg 6}_{\lg 1 - \lg 6}$$

$$\lg x = \lg(1/6) \quad (\text{Svar: } x = 1/6)$$

# Exempel

Lös ekvationen

$$2 \log_3 x + \log_9 x = 10 \quad .$$

## Basbyte:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \quad (\text{Logaritmera bägge led, bas } b)$$

$$\log_b x = y \log_b a \quad (\text{Räkneregler f. logaritmer})$$

$$y = \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

# Lösningsförslag

Skriv VL på samma bas, t ex bas 9:

$$2 \cdot \frac{\log_9 x}{\log_9 3} + \log_9 x = 10 \quad \left( \log_3 x = \frac{\log_9 x}{\log_9 3} \right)$$

$$\log_9 x = 2 \Leftrightarrow x = 9^2 = 81.$$

# Exempel

Lös ekvationen

$$(\log_2 x)^2 + \log_2(x^2) - 3 = 0 \quad .$$



# Lösningsförslag

Utnyttja logaritmlagar:

$$(\log_2 x)^2 + 2 \cdot \log_2 x - 3 = 0 \quad (\text{Sätt } t = \log_2 x.)$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t + 1)^2 = 4, \text{ vilket ger } t_1 = 1 \text{ och } t_2 = -3.$$

Det betyder att

$$\log_2 x = 1 \text{ resp. } \log_2 x = -3, \text{ dvs. } x = 2 \text{ resp. } x = 1/8.$$

# Exempel

Antag att  $\log_{15} 5 = a$ . Uttryck  $\log_{15} 9$  i  $a$ .

# Lösningsförslag

$$\log_{15} 5 = a \Leftrightarrow 15^a = 5$$

Notera att  $\log_{15} 9 = 2 \cdot \log_{15} 3$  (Uttryck i  $a$ )

Utnyttja att  $\log_{15} 15 = 1$  dvs

$$1 = \log_{15} 15 = \log_{15}(3 \cdot 5) = \log_{15} 3 + \underbrace{\log_{15} 5}_{=a}$$

$$\log_{15} 3 = 1 - a \quad (\text{Svar: } \log_{15} 9 = 2(1 - a))$$

# Avslutande exempel

- Lös ekvationen

$$2 \ln x + \ln(x + 3) = \ln(x + 1) + \ln 2.$$

- Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^{\lg y} = 10 \\ \frac{y}{10} = x^2 \end{cases}$$

# Läs och lös på egen hand

- Lös ekvationen

$$\ln x + \ln(x - 1) = \ln 2 + \ln(3 - x).$$

- Lös ekvationen

$$\lg x^2 + \frac{2}{\lg x} = 5.$$

Svar:  $x = \sqrt[10]{100}$ ,  $x = 10$

# Lösningförslag – pkt 1 (Tjuvkika inte)

Ekvationen kräver att  $1 < x < 3$  (eller hur?). Med räkneregler får vi

$$\ln \left( \frac{x^2 - x}{6 - 2x} \right) = 0$$

M.a.o. måste

$$\frac{x^2 - x}{6 - 2x} = e^0 = 1.$$

Detta leder oss till andragradsekvationen

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 1/2)^2 = \frac{25}{4} ,$$

med lösningarna  $x_1 = 2$  respektive  $x_2 = -3$ .

Eftersom villkoret  $1 < x < 3$  måste gälla, duger enbart  $x = 2$  som lösning.

# Att öva på egen hand

Lös ekvationen



$$\log_2 x \cdot \log_3 x = \log_4 x \quad (\text{Svar: } x_1 = 1 \text{ resp. } x_2 = \sqrt{3}.)$$



$$\ln(x + 1) - 2 \ln(-x) = \ln 2. \quad (\text{Svar: } x = -1/2.)$$



$$3^x - 3^{x/2} = 6 \quad (\text{Svar: } x = 2.)$$