M0038M Differentialkalkyl, Lekt 10, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

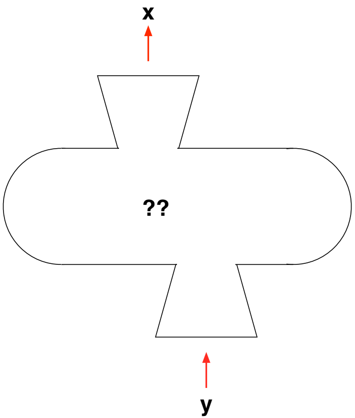
Repetition Lekt 9

- Bestäm största värdet av

$$5\sin v + 12\cos v.$$

Inversa funktioner - om att köra funktionsmaskinen baklänges

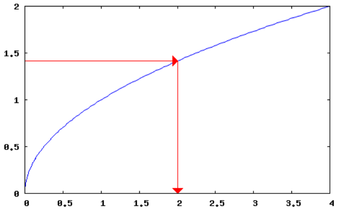
Om vi kör vår funktionsmaskin baklänges — vad händer då?



Vi skall titta närmare på detta i ett exempel.

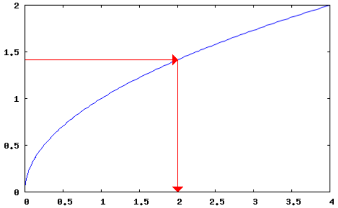
Exempel

Betrakta funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ (blå graf). Analysera funktionen med avseende på omvändbarhet.



Här ser vi, att två olika x-värden aldrig ger upphov till ett och samma y-värde. För varje y finns precis ett x-värde.

Är ”baklängesmaskinen” en funktion? Ja, det är den. Man brukar säga att funktionen $y = \sqrt{x}$ är *omvändbar* eller *inverterbar*.



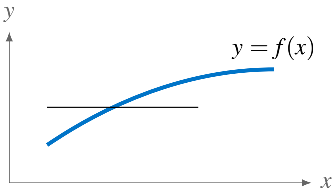
Definition

Om $f(x)$ är en *omvändbar funktion*, existerar *inversen* till f, med beteckning f^{-1}. Det gäller att

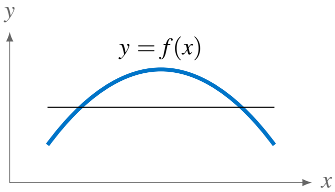
$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Anmärkning

Om en funktion skall vara omvändbar, innebär det att varje linje, parallell med x-axeln, får skära funktionens graf i *högst en punkt*. Det får alltså inte finnas flera x-värden för ett specifikt y-värde.



(a) f är omvändbar



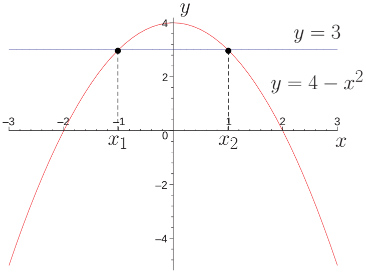
(b) f är inte omvändbar

Exempel

Betrakta funktionen

$$f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \leq x \leq 3.$$

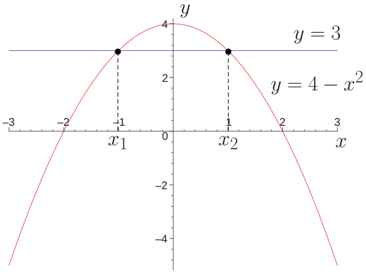
- Håller du med om att $f(x)$ faktiskt **är** en funktion?
- Lös ekvationen $f(x) = 3$. Kan du med ledning av detta analysera funktionen med avseende på omvändbarhet?



Lösningsförslag

Vi konstaterar att för y-värdet 3 existerar två x-värden, x_1 och x_2. Vår funktionsmaskin spottar tydligen ut två olika element för elementet 3.

- Är ”baklängesmaskinen” en funktion? Svaret är ja. (Varför?)
- Är ”baklängesmaskinen” en omvändbar funktion? Svaret är nej.



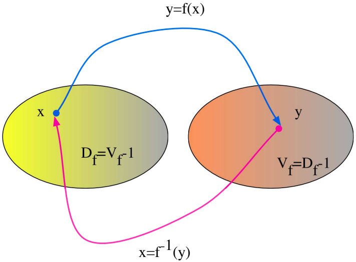
Omvändbara funktioner – mer generellt

En funktion f med definitionsmängd D_f sägs vara *omvändbar/inverterbar* om $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ för godtyckliga val av $x_1, x_2 \in D_f$.

Definition

Antag att f är en omvändbar funktion. Med f^{-1} menar vi *inversen* till f, som till varje $y \in V_f$ tillordnar ett entydigt $x \in D_f$ med $y = f(x)$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$



(Alternativ formulering: $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$.)

Egenskaper hos inversen

- $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$,
- $D_{f^{-1}} = V_f$,
- $V_{f^{-1}} = D_f$,
- $f^{-1}(f(x)) = x,\ x \in D_f$ (Forts nästa sida)

Egenskaper hos inversen, forts

- $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in D_{f^{-1}}$,
- $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$, $x \in D_f$,
- Om vi representerar f och f^{-1} i samma koordinatsystem så är grafen av f och grafen av f^{-1} varandras spegelbilder i linjen $y = x$.

När är en funktion omvändbar?

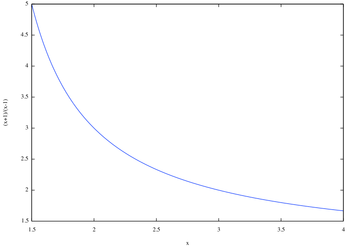
Om f är *strängt monoton* (dvs. strängt avtagande eller strängt växande) så är f omvändbar och därmed har f en invers.

Exempel

Funktionen

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x \neq 1,$$

är strängt avtagande och är därmed omvändbar. Bestäm inversen.



Lösningsförslag

Sätt $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. Vi löser ut x :

$$y(x-1) = x+1$$

$$x(y-1) = y+1. \quad (\text{ Svar: } x = f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1})$$

Arcusfunktionerna

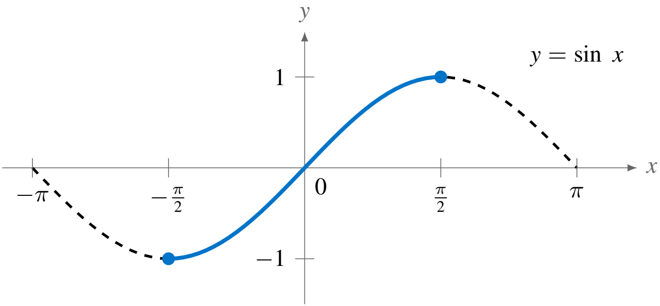
Som vi redan vet, är våra trigonometriska funktioner periodiska. Det är inte alltid en fördel. Periodiska funktioner är nämligen inte inverterbara. Men kan vi trots detta definiera ”inverser” till cosinus, sinus och tangens?

Ja, det kan vi – om vi betraktar de trigonometriska funktionerna på vissa, särskilt bestämda intervall där de är strängt växande eller strängt avtagande.

Vilka intervall är det frågan om?

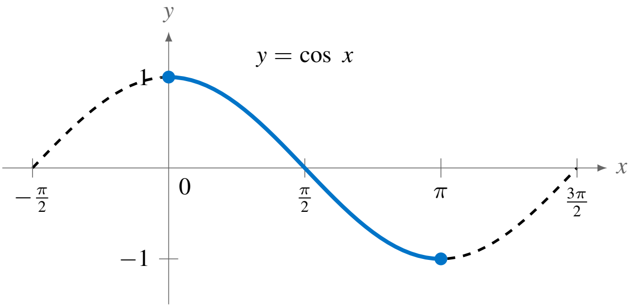
Omvändbar sinus

Funktionen $y = \sin\ x$ är omvändbar på intervallet $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,enligt nedanstående figur:



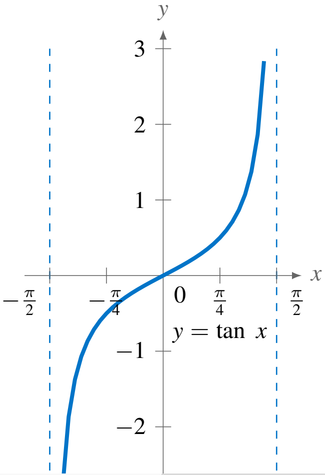
Omvändbar cosinus

Funktionen $y = \cos\ x$ är omvändbar på intervallet $[0, \pi]$,enligt nedanstående figur:



Omvändbar tangens

Funktionen $y = \tan\ x$ är omvändbar på intervallet $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,enligt nedanstående figur:



Sammanfattning

Funktion	**Intervall**
Sin	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
Cos	$[0, \pi]$
Tan	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

På ovanstående intervall är funktionerna omvändbara med inverserna *arcus cosinus*, *arcus sinus* och *arcus tangens*.

Definition

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y\,,\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2},$$
$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y\,,\, 0 \leq y \leq \pi,$$
$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y\,,\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Utantill-läxa

Lär dig följande minnesregler utantill!

- Arcus sinus för ett tal mellan -1 och 1 är den vinkel mellan $\pm\pi/2$, vars sinus är talet.
- Arcus cosinus för ett tal mellan -1 och 1 är den vinkel mellan 0 och π, vars cosinus är talet.
- Arcus tangens för ett tal mellan $\pm\infty$ är den vinkel mellan $\pm\pi/2$, vars tangens är talet.

Avslutande exempel

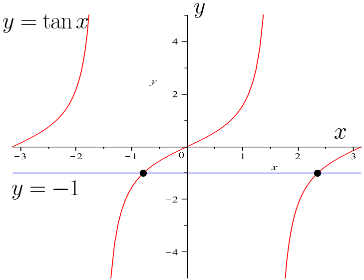
- Bestäm $\arcsin(\sin 0.3)$,
- $\cos(\arcsin 0.6)$,
- På egen hand $\arctan(\tan \frac{3\pi}{4})$.

Lösningsförslag, punkt 3

$\arctan(\tan \frac{3\pi}{4}) \neq \frac{3\pi}{4}$.

Här kan vi inte åberopa ”cancellation identity” (s. 72 FN), eftersom omvändbarheten gäller i intervallet $(-\pi/2, \pi/2)$.

Vi noterar att $\tan \frac{3\pi}{4} = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Därför måste vi svara med vinkeln $-\pi/4$.



Läs och lös på egen hand

Avgör om funktionen

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

har en invers. Bestäm den i så fall och rita dess graf i samma koordinatsystem som f.

Lösningsförslag-tjuvkika inte

Omvändbarhet. Välj $\overbrace{0 <}^{OBS!} x_1 < x_2$ och undersök

$$f(x_1) - f(x_2) = 1 + \frac{1}{x_1} - (1 + \frac{1}{x_2}) = \qquad \text{(Gör liknämn.)}$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0,$$

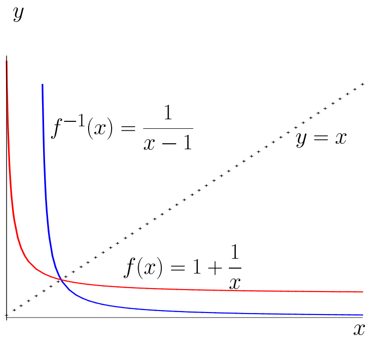
vilket betyder att f är strängt avtagande och därmed omvändbar.

Lös ut x. Sätt $y = 1 + \frac{1}{x}$. Vi löser ut x som ger $x = \dfrac{1}{y-1}$. Den inversa funktionen ges alltså av yttrycket $x = f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y-1}$.

Variabelskifte. När vi nu skall rita grafen till f^{-1} byter vi x mot y och y mot x och skriver $y = f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Graf

Graferna till f och f^{-1} är varandras spegelbilder i linjen $y = x$.



Att fundera. . .

Är funktionen $y = |x|$ en funktion som kan köras ”baklänges”?

Hmmm. . .