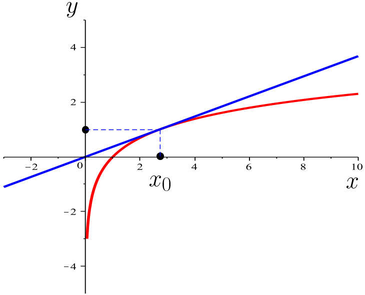
M0038M Differentialkalkyl, Lekt 19, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Repetition Lekt 18

- Bestäm ekvationen för den linje som tangerar kurvan $y = \ln x$ och som passerar genom origo.



- Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 2x^2 + 2y^2$$

i punkten $(2, 2)$.

Apropå notationer

Derivatan noteras på olika sätt. Antag att $y = f(x)$.

Lagranges notation $f'(x), f''(x), \ldots$

Leibniz notation $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots$

Newtons notation $\dot{y}, \ddot{y}, \ldots$

Eulers notation $Df(x), D^2f(x), \ldots$

Inom fysiken används ofta Newtons notation vid tidsberoende problem.
I vår kurs är Lagranges respektive Leibniz notation vanligast.

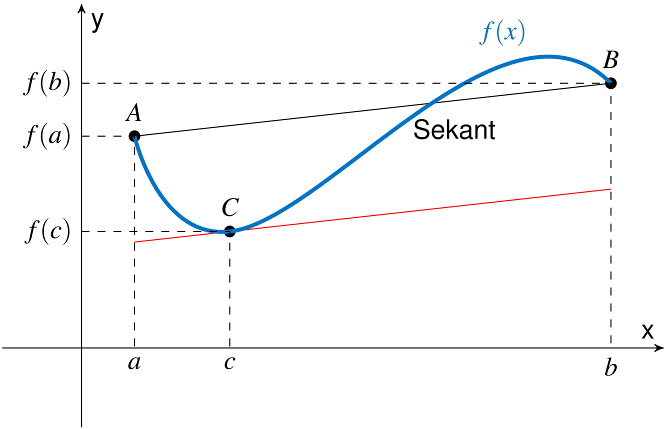
Differentialkalkylens medelvärdessats

En fundamental sats för deriverbara funktioner är differentialkalkylens medelvärdessats (Lagranges medelvärdessats). Den är ett viktigt verktyg när vi skall undersöka funktioners egenskaper.

Antag att f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ och deriverbar på intervallet (a,b). Då finns åtminstone en punkt $c \in (a,b)$ där

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Satsen säger att det på kurvan finns minst en punkt C mellan ändpunkterna A och B där tangenten i C har samma lutning som sekanten genom A och B.



Exempel

Vi betraktar parabeln $f(x) = (x-4)^2 + 1$. Vi väljer 2 punkter på grafen, t ex $A : (3, 2)$ resp. $B : (6, 5)$ och drar en rät linje mellan dessa punkter.

MVS säger att det existerar åtminstone en punkt $c \in (3, 6)$ där

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{5-2}{6-3} = 1$$

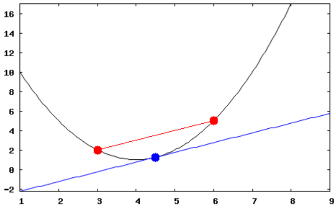
$$f'(c) = 2(c-4) = 1, \quad \text{dvs} \quad c = 9/2,$$

som ligger mellan 3 och 6 på x-axeln.

Tangentens ekvation i $(c, f(c))$: $\quad y = x - 13/4$

Figur

Vi åskådliggör situationen med en figur. Sekantens (röd) lutning är densamma som tangentens (blå) lutning.



Anmärkning

Om ett föremål rör sig rätlinjigt och dess läge vid tiden t är $f(t)$, är dess medelhastighet mellan $t = a$ och $t = b$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad ,$$

och dess (momentana) hastighet i $t = c$ är $f'(c)$.

Medelvärdessatsen säger att vid någon tidpunkt $t = c$ mellan $t = a$ och $t = b$, är den momentana hastigheten $f'(c)$ lika med medelhastigheten.

Exempelvis om en bil färdas 180 km på 2 timmar, måste hastighetsmätaren visa 90 km/h åtminstone en gång.

Med hjälp av medelvärdessatsen (MVS) kan man visa följande sats:

Antag att en funktion f är deriverbar på ett intervall J. Då gäller

(a) $f'(x) = 0$ för alla $x \in J \Rightarrow f$ är *konstant* på J,

(b) $f'(x) > 0$ för alla $x \in J \Rightarrow f$ är *strängt växande* på J,

(c) $f'(x) < 0$ för alla $x \in J \Rightarrow f$ är *strängt avtagande* på J.

Satsen är ett viktigt hjälpmedel för att kunna dra slutsatser om en funktion, utgående från dess derivata. Vi nöjer oss med formuleringen. Beviset utelämnas.

Exempel

Ange de intervall där funktionen

$$f(x) = x^3 - 12x + 1$$

är strängt växande respektive strängt avtagande.

Lösningsförslag

$f(x) = x^3 - 12x + 1.$ (Derivera.)

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$ (Faktorisera derivatan.)

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x-2)(x+2) = 0$ (ger att $x = \pm 2$.)

Teckentabell

x	$-\infty$		-2		2	∞
3(x+2)	—	—	0	+++	+++	++
x-2	—	—	—	—	0	++
$f'(x)$	+++	+++	0	—	0	++
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Svar: $f(x)$ är strängt växande i $-\infty < x < -2$ resp. i $2 < x < \infty$, strängt avtagande i $-2 < x < 2$.

Avslutande exempel

En sluten burk med volymen 1 dm^3 skall tillverkas av tunnplåt. Bestäm radie för minimal totalarea.

Strategi: Med derivatan kan vi lokalisera extrempunkter. Vi sätter förstaderivatan lika med 0 och löser ut tänkbara kandidater.

Lösningsförslag

Antag att h och x är höjden respektive radien (i dm) och S totalarean (i dm^2). Då gäller

$$S = 2\pi xh + 2\pi x^2. \quad \text{(Lös ut } h \text{ som funktion av } x\text{)}$$

Eftersom volymen $\pi x^2 h = 1$, är $h = \dfrac{1}{\pi x^2}$. (Sätt in i S.)

$$S(x) = \frac{2}{x} + 2\pi x^2.$$

$$\lim_{x\to 0} S(x) = \lim_{x\to\infty} S(x) = \infty.$$ (Viktig slutsats.)

Det innebär att $S(x)$ är minimal i en stationär punkt. (Derivera.)

$$S'(x) = -\frac{2}{x^2} + 4\pi x = \frac{2\pi}{x^2}(-\frac{1}{\pi} + 2x^3).$$

(Sätt derivatan till 0.)

$S'(x) = 0$ för $x = \sqrt[3]{1/2\pi}$.

Teckentabell

x	0		$\sqrt[3]{1/2\pi}$		∞
$S'(x)$		- - -	0	+ + +	
$S(x)$	∞	$\searrow$	S_{min}	$\nearrow$	∞

Teckentabellen visar att S är minimal för $x = \sqrt[3]{1/2\pi}$.

Klurigt problem att grunna på...

Visa att $\sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2}$ för $x > 0$.

Antag att $x > 0$.

Enligt MVS finns $c \in (0, x)$ så att

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \underbrace{=}_{\text{MVS}}$$

$$= f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{1+c}} < \underbrace{1/2}_{c \in (0,x)} .$$

Till sist:

$$f(x) < \frac{x}{2} + 1, \text{ och vi är klara.}$$