M0038M Differentialkalkyl, Lekt 23, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Repetition Lekt 22

Bestäm eventuella asymptoter, eventuella lokala extrempunkter samt rita grafen till

$$f(x) = x - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right), \quad x > -1.$$

Anmärkning

Kurvan $y = f(x)$ har den *sneda asymptoten* $y = kx + m$ om det gäller att

$$f(x) - (kx + m) \to 0 \text{ då } |x| \to \infty$$

Detta är liktydigt med att

$$\frac{f(x)}{x} \to k \text{ då } |x| \to \infty \tag{1}$$

och

$$f(x) - kx \to m \text{ då } |x| \to \infty \tag{2}$$

Lokala extrempunkter

Stationära punkter: $f'(x) = 0$, dvs

$$\frac{2\,x^2 + 2\,x}{2\,x^2 + 2\,x + 1} = 0$$

Faktorisera $f'(x)$:

$$\frac{2x(x+1)}{2\,x^2 + 2\,x + 1}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ eller $x = 0$.

Vi noterar att $x = 1$ ej tillhör funktionens definitionsmängd. Teckenstudium av $f'(x)$ – Övning! – leder till att $x = 0$ är lokal minimipunkt.

Asymptoter

Sneda $y = kx + m$: Undersök

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)}{x} = 1 \quad \text{(Övning)}$$

Undersök därefter

$$m = \lim_{x\to\infty} f(x) - 1 \cdot x = \lim_{x\to\infty} -\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\frac{\pi}{4} \quad \text{(Övning)}$$

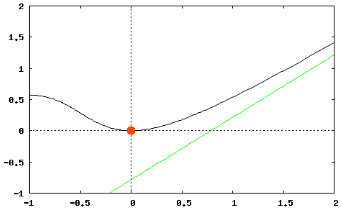
Sned asymptot: $y = x - \pi/4$. Inga övriga asymptoter. Eller hur?

Graf

Graf,

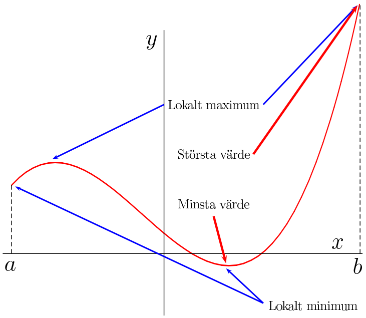
$$f(x) = x - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

med sin asymptot och lokala extrempunkt.



Största och minsta värde

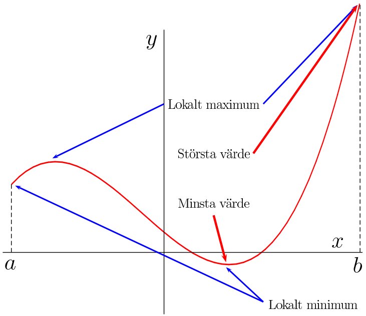
Antag att en funktion är definierad i ett intervall $a \leq x \leq b$. Man frågar sig ibland: I vilka punkter kan funktionen anta ett största eller ett minsta värde?



För att kunna besvara frågan måste vi bestämma förekommande lokala maximi- och minimivärden. Vi inser nog att största och minsta värdet självfallet är lokala extremvärden, och vi konstaterar följande:

En funktion, definierad på ett slutet, begränsat intervall kan anta sitt största eller minsta värde (globalt maximum eller globalt minimum) i följande punkter:

- i stationära punkter, dvs. punkter där $f'(x) = 0$,
- i punkter där derivatan inte existerar,
- i intervalländpunkter.



När man löser problem som berör största och minsta värde, följer man en sorts "ritual". Vi skall titta på denna lösningsmetodik i ett gammalt tentamensproblem.

Exempel Ange största och minsta värde till funktionen

$$f(x) = -3x^4 - 4x^3 + 12x^2 \ , \ -0.5 \leq x \leq 2.$$

Förslag på lösningsritual

Stationära (inre)punkter.

Förstaderivatan:

$$\begin{aligned} &-12x^3 - 12x^2 + 24x = \\ &= -12x(x^2 + x - 2) = -12x(x-1)(x+2). \end{aligned}$$

Nollställen till $f'(x)$: $x = 0, 1, -2$. Här ligger $x = -2$ utanför aktuellt intervall. **Vi förkastar den punkten**.
Misstänkta punkter: $x = 0, 1$.

Ändpunkter.

Misstänkta punkter: $x = -0.5, 2$.

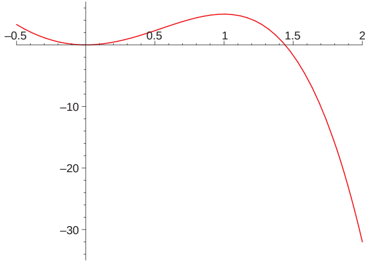
Punkter där derivatan inte existerar.

Sådana punkter saknas i vårt exempel.

Därmed är vår undersökning fullbordad.

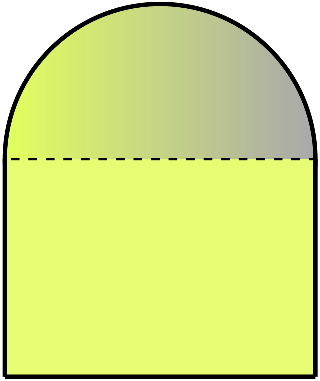
Rangordna. Slutligen rangordnar vi funktionsvärdena i de misstänkta punkterna.

x	$f(x)$
-0.5	$\approx 3,3$
0	0
1	5 f_{max}
2	-32 f_{min}



Avslutande exempel

En fönsterruta har formen av en halvcirkel ovanpå en rektangel. Givet att fönsterrutans area ska vara 2 m^2, vilka dimensioner på fönsterrutan minimerar omkretsen?



Försök på egen hand

- Betrakta mängden av alla rätblock med kvadratisk basyta och med fixa volymen 100 m^3. Vilket rätblock har den minsta mantelytan? Ange dess dimensioner i m.