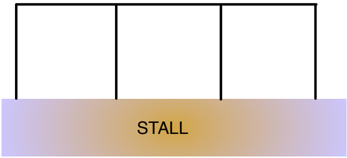
M0038M Differentialkalkyl, Lekt 24, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Repetition Lekt 23

En hästägare har köpt 400 meter staket och ska konstruera en inhägnad. En sida av inhägnaden utgörs av en rak stallvägg och behöver därför inget staket. Hästägaren ska indela inhägnaden i tre rektangulära sektioner genom en lång och fyra kortare staketdelar.
Undersök hur hästägaren ska välja längden av den långa staketdelen och de kortare delarna för att den inneslutna totalarean skall bli så stor som möjligt.



Högre derivator

- Om f är deriverbar, kallas $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$ *förstaderivatan av f med avseende på x.*
- Om f' är deriverbar, kallas $f''(x) = \dfrac{d^2f}{dx^2}$ *andraderivatan av f med avseende på x.*
- Om f'' är deriverbar, kallas $f^{(3)}(x) = \dfrac{d^3f}{dx^3}$ *tredjederivatan av f med avseende på x.*

Anmärkning

n-te-derivatan av $f(x)$ med avseende på x noteras

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

Exempel

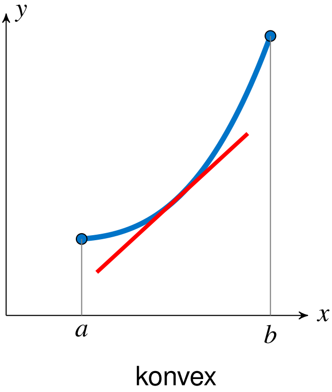
Om $y = \tan(kx)$, visa att

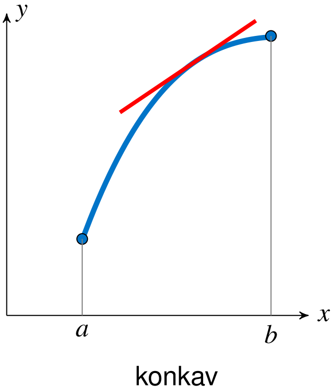
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2k^2y(1+y^2).$$

Konvexa och konkava funktioner

Låt I vara ett intervall. Funktionen $f(x)$ kallas

- *konvex* på I om grafen ligger ovanför alla sina tangenter på I
- *konkav* på I om grafen ligger under alla sina tangenter på I





Anmärkning

Oftast använder man andraderivatan för att visa att en funktion är konvex/konkav.

- Om f är deriverbar i intervallet I, och om $f'(x)$ är *strängt växande (strängt avtagande)* i I, så är f *konvex (konkav)* i I.

Av detta följer omedelbart

- Om f är två gånger deriverbar i intervallet I, och om $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) i I, så är f konvex (konkav) i I.

Inflexionspunkt

En punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ kallas *inflexionspunkt* om $f(x)$ ändrar sin konvexitet i P_0.

För x "nära" P_0 skall $f(x)$ därmed vara *konvex* (dvs $f''(x) > 0$) för $x < x_0$ och *konkav* (dvs $f''(x) < 0$) för $x > x_0$ eller tvärtom.

Dessutom skall $f''(x_0) = 0$.

Alternativ formulering

Låt f vara en funktion, definierad och deriverbar i en omgivning av punkten $P_0 = (x_0, y_0)$.

Vi säger att P_0 är en *inflexionspunkt* på kurvan om kurvan **skär sin tangent** i P_0.

Det gäller också, att $f''(x_0) = 0$, *förutsatt att f är två gånger deriverbar*.

Terasspunkt vs. inflexionspunkt

- En inflexionspunkt är en punkt där andraderivatan växlar tecken.
- Ett villkor som måste vara uppfyllt (men som däremot inte garanterar en inflexionspunkt, t ex $y = x^4$) är att andraderivatans värde är noll i inflexionspunkten.
- En terasspunkt är en punkt där funktionens förstaderivata är noll men inte växlar tecken i punkten.
- Terasspunkter är en speciell typ av inflexionspunkter.
- Alla inflexionspunkter behöver inte vara terasspunkter (t ex $y = \sin x$).

Anmärkning

Ibland kan det vara enklare att använda andraderivatans tecken i en stationär punkt för att avgöra om något extremvärde föreligger.

Låt f vara en två gånger deriverbar funktion. om $f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0) < 0\,(> 0)$, så har f ett lokalt maximum (minimum) för $x = x_0$.

Exempel

Givet kurvan som ges av funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 2}{x^2 + 1} \quad ,$$

bestäm asymptoterna, var funktionen är växande och avtagande, alla lokala maxima och minima, var den är konvex och konkav, inflexionspunkterna (I.P.), samt skissa kurvan.

Lösningsförslag

Asymptoter Inga lodräta. Nämnaren $\neq 0 \quad \forall x$.
Sneda/horisontella?Vi beräknar

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x + 2}{x^2 + 1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2 - 1/x + 2/x^2)}{x^2(1 + 1/x^2)} = \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0} = 2.$$

Horisontell asymptot: $y = 2$, $-\infty < x < \infty$.
Anm: Ovanst. gränsvärde gäller även om $x \to -\infty$ (eller hur?) .

Första- och andraderivator Efter litet räknande får vi:

$$y' = \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$y' = 0$ för $x = \pm 1$.

$$y'' = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{(x^2+1)^3}$$

$y'' = 0$ för $x = 0$, samt $x = \pm\sqrt{3}$.

Analys av lokala extremvärden och konvexitet

Lokala extrema

$x = \pm 1$ stationära punkter. Vi beräknar

$$y''(1) = \frac{2(3-1)}{(1+1)^3} = \frac{1}{2} > 0 \quad ,$$

dvs. $x = 1$ är en **lokal minimipunkt**.
Vi beräknar även

$$y''(-1) = \frac{-2(3-1)}{(1+1)^3} = -\frac{1}{2} < 0 \quad ,$$

dvs. $x = -1$ är en **lokal maximipunkt**.

Teckentabell, $f''(x)$

Vi teckenstuderar $f''(x)$.

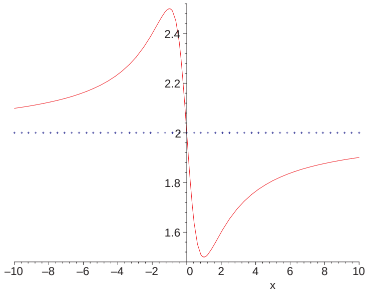
Konvexitet

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+	0	-
f(x)	$\cup$	I.P.	$\cap$	I.P.	$\cup$	I.P.	$\cap$

Vår analys är därmed fullbordad och vi sammanfattar till sist.

Slutsats, graf

- $x = -1, y = 5/2$ är en lokal maximipunkt, $(1, 3/2)$ är en lokal minimipunkt.
- f är konkav på $-\sqrt{3} < x < 0$ resp. på $\sqrt{3} < x < \infty$.
- f är konvex på $-\infty < x < -\sqrt{3}$ resp. på $0 < x < \sqrt{3}$.
- $(-\sqrt{3}, (8+\sqrt{3})/4)$, $(0, 2)$ resp. $(\sqrt{3}, (8-\sqrt{3})/4)$ är inflexionspunkter.
- $y = 2$ horisontell asymptot.



Fysikaliska tillämpningar

En partikel rör sig längs en rät linje. Dess medelhastighet under tidsintervallet $[t, t + \Delta t]$ är

$$v_{av}(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Då $\Delta t \to 0$, närmar sig medelhastigheten *den momentana hastigheten*, vilken definieras som

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Acceleration

Medelaccelerationen under tidsintervallet $[t, t+\Delta t]$ är hastighetsförändringen per tidsenhet, eller

$$a_{av}(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Då $\Delta t \to 0$, närmar sig medelaccelerationen *den momentana accelerationen*, vilken definieras som

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (\dot{v} = v'(t))$$

eller

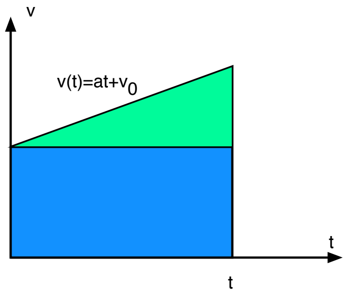
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}. \quad (\ddot{x} = x''(t))$$

Anmärkning

- Tangentens lutning i en punkt hos en $x - t$-graf (väg-tid-graf) tolkas som momentanhastigheten $v = dx/dt$.
- Tangentens lutning i en punkt hos en $v - t$-graf (hastighet-tid-graf) tolkas som momentanaccelerationen $a = dv/dt$.

Konstant acceleration

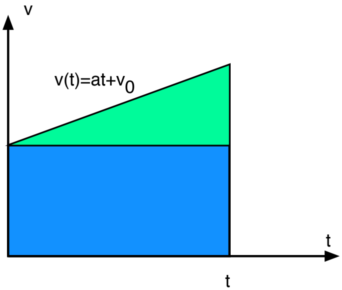
I vidstående hastighet-tid-graf avbildas hastigheten v som funktion av tiden t.
Hastigheten är en linjär funktion: $v = v_0 + at$.



Fysikaliskt innebär detta att accelerationen är konstant: Rörelsen är *likformigt föränderlig*. Vi betraktar rörelsen under tidsintervallet $[0, t]$ och skall bestämma arean A av området under grafen och ovanför t-axeln.

Arean A har formen av ett parallelltrapets(rektangel + triangel).

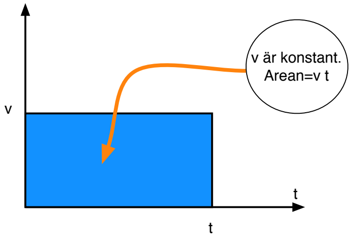
$$
\begin{aligned}
A = & \overbrace{t \cdot v_0}^{\text{Rektangel}} + \overbrace{\frac{t \cdot (v - v_0)}{2}}^{\text{Triangel}} = \\
& = t \cdot v_0 + \frac{t \cdot (at + v_0 - v_0)}{2} = \\
& = v_0 t + \frac{at^2}{2}.
\end{aligned} \tag{1}
$$



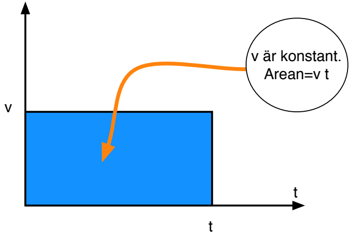
Tolkning

Hur skall vi tolka areauttrycket (1)?

Vi gör en liten andhämtning och betraktar tillfälligt en (välbekant) hastighet-tid-graf över den *likformiga rörelsen*, dvs. då $a = 0$ (konstant hastighet).



Den blåfärgade arean representerar *tillryggalagd väg* under tidsintervallet $[0, t]$ och betecknas s. Vi känner igen den klassiska formeln $s = v \cdot t$.



På samma sätt tolkar vi areauttrycket (1) från den likformigt föränderliga rörelsen. Även här representerar arean den tillryggalagda vägen under tidsintervallet $[0, t]$.

Avslutande exempel

En spårvagn färdas mellan två hållplatser på 49 s. Den accelereras likformigt (dvs. accelerationen är konstant) på 10 s till farten 10 m/s.

Därefter färdas spårvagnen med konstant fart ett stycke, och bromsas slutligen likformigt till stillastående på 8 s.

- Rita ett fart-tid-diagram över den beskrivna situationen.
- Hur långt är det mellan hållplatserna?

Lösningsskiss

Arean under $v - t$-grafen tolkas som den tillryggalagda vägen.

$$\frac{10 \cdot 10}{2} + 31 \cdot 10 + \frac{8 \cdot 10}{2} = 400\,\text{m}.$$