M0038M Differentialkalkyl, Lekt 4, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Lekt 3

Om $f(x) = 2 - x^2$ och $g(x) = \sqrt{x+2}$, bestäm nedanstående funktion och dess definitionsmängd.

- $(g \circ f)(x)$.

Lösningsförslag

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{4 - x^2}$.

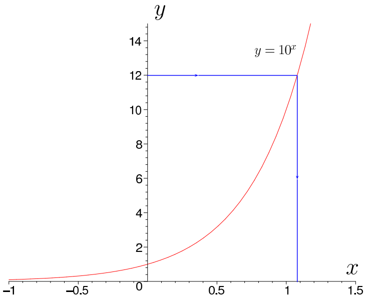
$$D_f = \{x \mid -\infty < x < \infty\}, D_g = \{x \mid x \geq -2\}.$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - x^2 \geq -2\} = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}.$$

Logaritmer

Vi skall försöka lösa ekvationen $10^x = 12$. Låt oss studera vidstående graf.



Vi konstaterar att $10^{1,07} \approx 11,75$ och att $10^{1,08} \approx 12,02$. Som vi konstaterar, är det besvärligt att "jaga" ytterligare värdesiffror. Vad som behövs är ett nytt begrepp: logaritmer.

Exempel

Ett godtyckligt tal y, $y > 0$, kan skrivas som en 10-potens:

$$y = 10^x \quad ,$$

där potensens exponent, x, kallas 10-logaritmen för y med beteckning $\lg y$ ($\log y$). Det gäller att

$$x = \lg y \Leftrightarrow y = 10^x \quad .$$

10-logaritmfunktionen och exponentialfunktionen 10^x är varandras inverser. Vi återkommer till inversa funktioner längre fram i kursen.

I vårt inledande exempel gäller att $x = \lg 12 \approx 1,079$. Vi observerar:

10-logaritmen för ett tal är alltså den exponent, som 10 skall upphöjas till, för att vi skall få talet.

Tabell

Följande tabell bör läras utantill (du kan säkert expandera den åt bägge håll, inte sant?):

På grund av att	gäller:
$10000 = 10^4$	$\lg 10000 = 4$
$1000 = 10^3$	$\lg 1000 = 3$
$100 = 10^2$	$\lg 100 = 2$
$10 = 10^1$	$\lg 10 = 1$
$1 = 10^0$	$\lg 1 = 0$
$0,1 = 10^{-1}$	$\lg 0,1 = -1$

Exempel

Bestäm x när

- $\lg x = -2$.
- $\lg x = 2,74$.
- $\lg x = -5$.

Bestäm närmevärden där så är möjligt (med tre decimaler) till

- $\lg 8,85$.
- $\lg -3,47$.
- $\lg 0,03$.

Räkneregler

Vi har redan sett en del egenskaper hos logaritmer. Låt oss fortsätta med några räkneregler:

För a och b, bägge positiva, gäller

- $\lg(ab) = \lg a + \lg b$
- $\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$
- $\lg\left(\frac{1}{b}\right) = -\lg b$
- $\lg b^t = t \cdot \lg b$, t reellt tal

Härledning

Vi visar hur man härleder den första räkneregeln. Vi antar inledningsvis att $a = 10^c$ och $b = 10^d$.

Detta medför att $c = \lg a$ och $d = \lg b$. Då blir
$ab = 10^c \cdot 10^d \underbrace{=}_{\text{Regel}} 10^{c+d} = 10^{\lg a + \lg b}$, och vi är klara.

Exempel

Visa att

- $\lg 4 + \lg 25 = 2$.
- $\lg 20 - \lg 2 = 1$.
- $3 \cdot \lg 3 = \lg 27$.
- Lös ekvationen
$$\lg(x+1) = 2 \cdot \lg x \quad .$$
Svara exakt, inget närmevärde.

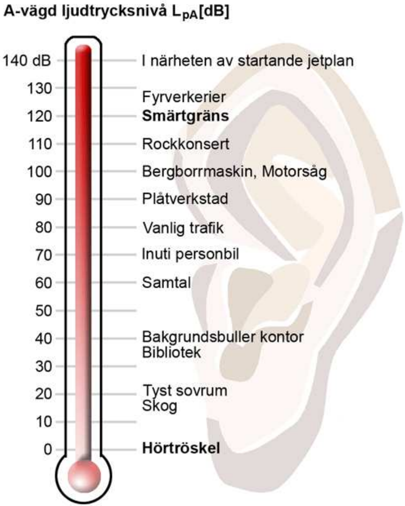
Exempel

Ljudets styrka L mäts i ljudtrycksnivå och anges i decibel, enligt

$$L = 10 \lg \frac{P}{P_0} \quad ,$$

där P_0 är en vedertagen referensnivå för ljudtrycket. Det innebär att decibelskalan är logaritmisk.

Bullertermometer–Arbetsmiljöverket



Exempel

Arbetsmiljöverket skriver:
"...två lika starka ljudkällor ger 3 dB högre ljudtrycksnivå än enbart den ena källan ..."
Hur kan det komma sig? Förklara.

Naturliga logaritmer

Vi har studerat 10-logaritmer. Det är emellertid inget som hindrar oss från att använda en annan positiv bas än 10, t.ex. basen a. Vi pratar då om s.k. a-logaritmer. Om $y = a^x$, gäller att $x = \log_a y$ (Observera beteckningen).

Antag att vi väljer basen $a = e$. Då får vi den s.k. e-logaritmen eller den naturliga logaritmen: Om $y = \mathrm{e}^x$, gäller att $x = \ln y$ (Observera beteckningen). Den naturliga logaritmen har liknande räkneregler som för t. ex. 10-logaritmen, och vi upprepar inte dessa.

Den allmänna logaritmen

Vi stannar en stund inför den allmänna logaritmfunktionen. För $x > 0$ gäller

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \quad .$$

Vi gör en del manipuleringar:

$$\ln x = \ln a^y \overset{regel}{=} y \cdot \ln a,$$

och vi kan till sist skriva

$$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad . \tag{1}$$

Formel (1) är en praktisk och mycket användbar formel, som ger oss ett samband mellan naturliga och allmänna logaritmer.

Exempel Beräkna $\log_3 2 \cdot \log_2 3$.

Halveringstid

Med halveringstid, $T_{1/2}$, menas den tid som åtgår för att mängden hos en radioaktiv isotop (som ju avklingar exponentiellt: $N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-kt}$) skall halveras.

Exempel

I medicinska sammanhang används ibland som spårämne det radioaktiva preparatet $^{22}_{11}\mathrm{Na}$, ”natrium–22”, för intravenös injektion. Isotopen har en halveringstid om 2,6 år.

- Bestäm den procentuella minskningen per år för $^{22}_{11}\mathrm{Na}$.
- Beräkna den tid som åtgår för att mängden $^{22}_{11}\mathrm{Na}$ skall minska till 10 procent av ursprungsmängden.

Avslutande exempel

Lös

(a) $\ln(x-1)+\ln(x+5)=\ln(2x)$

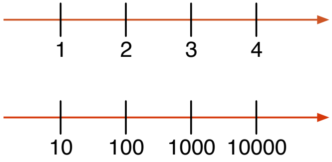
(b) $\ln(x+3)-\ln(x+1)=\ln 2$

(c) $e^{3x}-2e^{2x}-e^{x}=-2$

Svar (c) $x=0$ resp. $x=\ln 2$.

Extra: Logaritmisk skala

Skillnaden mellan en linjär och en logaritmisk skala framgår i vidstående figur.



En log-skala innebär att avståndet mellan 10 och 100 är lika stort som t ex avståndet mellan 1000 och 10000.

Med hjälp av ett *lin-log-diagram* kan man enkelt åskådliggöra grafen till en exponentialfunktion.
Vi betraktar exponentialfunktionen

$$y = B \cdot a^x.$$

Vi 10-logaritmerar:

$$\begin{aligned}
\lg y &= \lg(B \cdot a^x) \quad (\text{Räkneregler}) \\
\lg y &= \lg B + x \cdot \lg a \\
\lg y &= \underbrace{\lg a}_{Konst.} \cdot x + \underbrace{\lg B}_{Konst.} \quad (\text{Jfr } y = kx + m)
\end{aligned}$$

Anmärkning

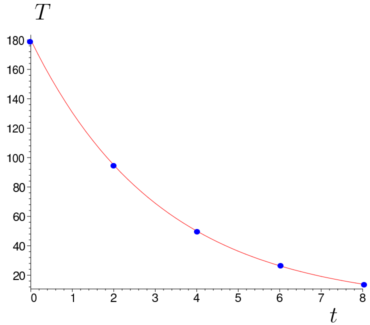
- $\lg y$ är en linjär funktion av x
- $\lg y = \lg a \cdot x + \lg B$
- Om vi avsätter $\lg y$ på y-axeln, kommer grafen till en exponentialfunktion att bli en rät linje.

Läs på egen hand

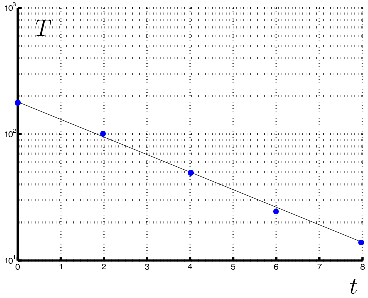
Man mätte temperaturen hos ett upphettat föremål, som placerats i ett kylrum. När avsvalningsprocessen inleds, är föremålets temperatur 180 °C. Anpassa en exponentialfunktion $T(t) = T_0 \cdot a^t$, till mätdata.

Tid (min)	0	2	4	6	8
Temp. (°C)	180	100	50	25	15

Så ser mätpunkterna ut i ett vanligt koordinatsystem. Vi har skissat den tänkta exponentialfunktionen i samma diagram.



Nu går vi till uppgiften att bestämma T_0 och a, och använder ett linlog-diagram där vi avsätter punkterna i diagrammet.



Nu skall vi använda en grafisk lösningsmetod.
Punkterna ligger längs en rät linje. Vi konstruerar den och gör avläsningar i diagrammet.

Med punkterna $(0, \lg 180)$ resp. $(8, \lg 15)$ erhåller vi

$$\lg a = \frac{\lg(15) - \lg(180)}{8} \approx$$
$$\approx -0,135, \text{ varav } a \approx 0,73 \quad .$$

Eftersom temperaturen vid tiden $t = 0$ var 180° C, är vi klara. Den sökta exponentialfunktionen blir $T(t) = 180 \cdot 0,73^t$.

Lös på egen hand

- Med hur många decibel ökas ljudnivån om ljudtrycket ökas 100 gånger?
- Hur förändras ljudtrycket om ljudnivån ökar från 85 till 110 dB?

$$L = 10\lg\frac{P}{P_0}$$

Svar: $20dB$ resp. $P_2/P_1 = 10^{3.5} \approx 3200.$