

# M0038M Differentialkalkyl, Lekt 8, H15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

# Läsövning

- "Summan av två tal"  $a + b$
- "Differensen mellan två tal"  $a - b$
- "Produkten av två tal"  $a \cdot b$
- "Kvoten mellan två tal"  $\frac{a}{b}$
- "x proportionell mot y"  $x = k \cdot y$
- "x omvänt proportionell mot y"  $x = k \cdot \frac{1}{y}$

# Repetition Lekt 7

Förenkla

$$\left( \frac{x^{\sqrt{2}}}{x^{-\sqrt{2}}} \right)^{\sqrt{2}}$$

# Trigonometri

Från början utgjorde trigonometrin den gren av matematiken som sysslade med att analysera trianglars egenskaper.

Ordet *trigonometri* kommer från grekiskans *triganon* 'triangel' och *metron* 'mått'.

Från början tillämpades trigonometrin inom bl.a. astronomi och navigering. I våra dagars matematik möter vi trigonometriska ofta i tillämpade sammanhang för att bygga matematiska modeller av diverse periodiska förlopp.

# Vinkelmåttet radianer

Vid vissa sammanhang är det en fördel att använda reella tal som vinkelmått.

- Radianer innebär förenklingar i formler,
- Många datorprogram använder radianer som standard.

# Definition

*1 radian* (lat. ra'dius 'liten stav', 'hjulaker') är storleken på den plana vinkel som upptas i centrum av en cirkel av en båge *med samma längd som cirkelns radie*.

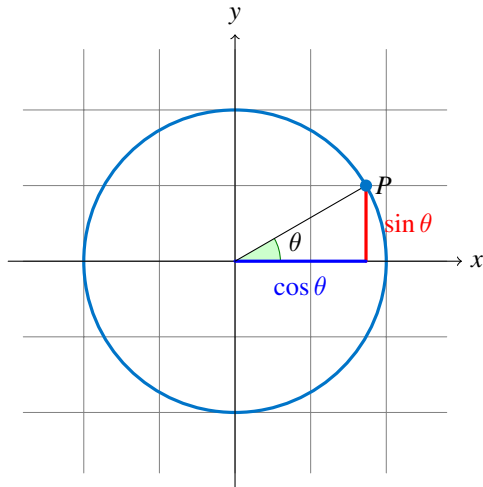
- Ett varv, dvs.  $360^\circ$ , motsvarar  $2\pi$  radianer (rad).
- $1^\circ = \frac{\pi}{180}$  rad.
- $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$ .

I nedanstående tabell sammanfattas några ofta förekommande vinklar:

Grader	Radianer	Grader	Radianer
$0^\circ$	0	$135^\circ$	$3\pi/4$
$30^\circ$	$\pi/6$	$150^\circ$	$5\pi/6$
$45^\circ$	$\pi/4$	$180^\circ$	$\pi$
$60^\circ$	$\pi/3$	$270^\circ$	$3\pi/2$
$90^\circ$	$\pi/2$	$360^\circ$	$2\pi$
$120^\circ$	$2\pi/3$		

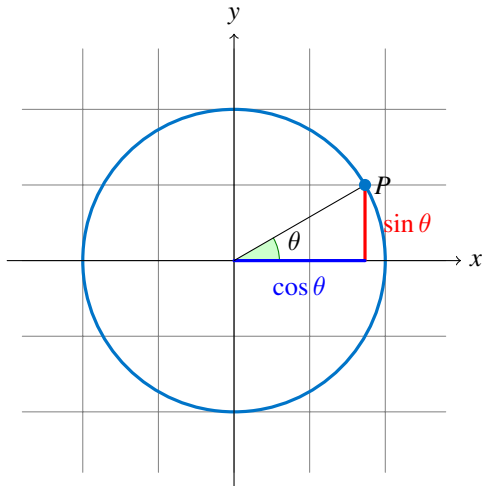
# Cosinus, sinus och tangens för en vinkel

Vi låter punkten  $P$  ligga på enhetscirkelns periferi. Vridningsvinkeln är  $\theta$  (positiv riktning=vänstervarv).





## Några viktiga egenskaper



För vinkeln  $\theta$  gäller:

- $\sin \theta = y$ -koordinaten för  $P$
- $\cos \theta = x$ -koordinaten för  $P$
- $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

Sinus- och cosinusfunktionerna är *periodiska* med *perioden*  $2\pi$ ,  
tangensfunktionen är periodisk med perioden  $\pi$ :

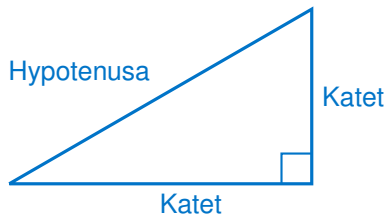
- $\cos(\theta + n \cdot 2\pi) = \cos \theta, n \in \mathbb{Z}$
- $\sin(\theta + n \cdot 2\pi) = \sin \theta, n \in \mathbb{Z}$
- $\tan(\theta + n \cdot \pi) = \tan \theta, n \in \mathbb{Z}$

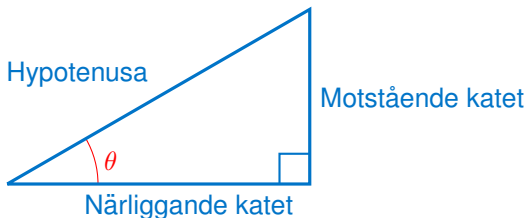
Vid spegling i horisontella axeln gäller

- $\cos(-\theta) = \cos \theta$
- $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

# Trigonometri i rätvinkliga trianglar

I en rätvinklig triangel är en vinkel  $90^\circ$ . Den sida som står mot den räta vinkeln kallas *hypotenusa* medan de två övriga sidorna kallas *kateter*.



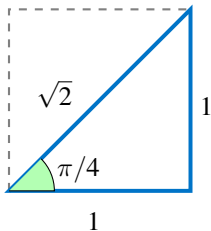


De trigonometriska funktionerna definieras för en spetsig vinkel  $\theta$ :

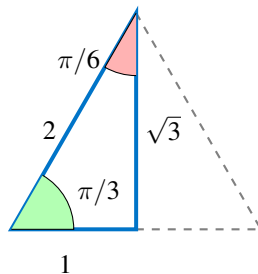
- $\cos \theta = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}}$  ,
- $\sin \theta = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}}$  ,
- $\tan \theta = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}$  .

# Standardtrianglar

I vidstående figur ser vi två rätvinkliga trianglar. Den vänstra triangeln är "en halv kvadrat", medan den högra triangeln är "en halv liksidig triangel". Är vi överens om sidlängder och vinklar?



(a) Halv kvadrat



(b) Halv liksidig

# Exempel

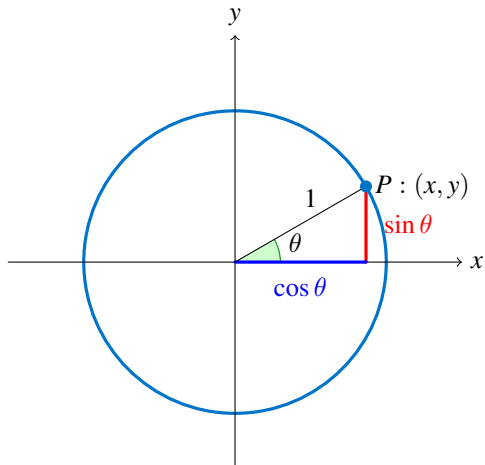
Bestäm de exakta värdena i nedanstående tabell:

$\theta$	$\cos \theta$	$\sin \theta$	$\tan \theta$
$\pi/6$			$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$		
$\pi/3$		$\sqrt{3}/2$	

# Trigonometriska ettan

För en godtycklig vinkel  $\theta$  gäller

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$



## Exempel

Antag att  $\sin \theta = -\sqrt{5}/3$ , och att  $\pi \leq \theta < 3\pi/2$ .  
Bestäm  $\cos \theta$  och  $\tan \theta$ .

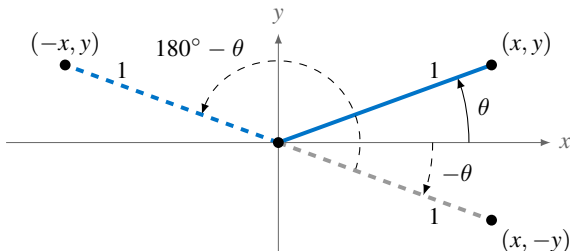


## Att lösa trigonometriska ekvationer

Bestäm alla lösningar till

$$\sin \theta = -0.682 \quad (1)$$

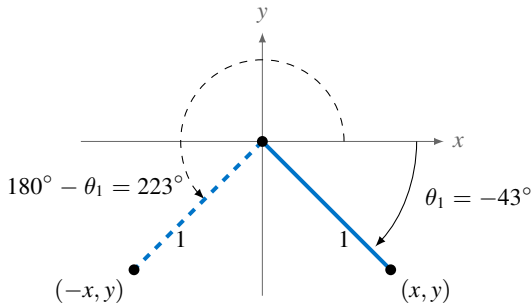
På enhetscirkeln finns två vinklar som ger samma  $y$ -koordinat, enligt nedanstående figur:

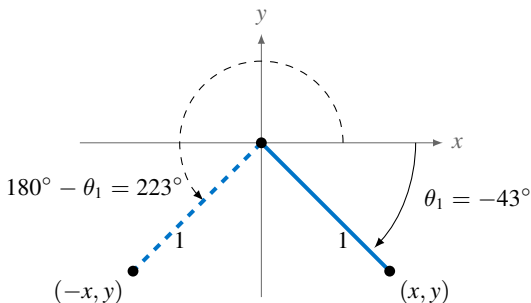


Vinklarna är  $\theta$  och  $180^\circ - \theta$ .

## Lösningförslag

Med miniräknare får vi  $\theta_1 \approx -43^\circ$ .





Den andra vinkeln blir då  $\theta_2 = 180^\circ - \theta_1 \approx 223^\circ$ .

Vi erhåller därmed samtliga lösningar till (1) genom att till  $\theta_1$  och  $\theta_2$  *addera en heltalsmultipel av varvet*.

$$x \approx -43^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ eller}$$

$$x \approx 223^\circ + n \cdot 360^\circ, \text{ där } n \in \mathbb{Z}.$$

## Anmärkning

Enhetscirkeln är mycket användbar när man löser  $\sin x = k$ . Vi resonerar på liknande sätt när det gäller ekvationerna för cosinus respektive tangens.

Vi sammanfattar de tre viktiga ekvationstyperna. **Notera att vi använder vinkelmåttet radianer i sammanfattningen.**

## Ekvationen $\sin x = k$

Betrakta ekvationen

$$\sin x = k, \quad -1 \leq k \leq 1, \quad ,$$

och antag att  $\theta$  är en lösning. Då skrivs samtliga lösningar enligt

$$x = \theta + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad ,$$

eller

$$x = \pi - \theta + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z} .$$

## Ekvationen $\cos x = k$

Betrakta ekvationen

$$\cos x = k, \quad -1 \leq k \leq 1, \quad ,$$

och antag att  $\theta$  är en lösning. Då skrivs samtliga lösningar enligt

$$x = \theta + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad ,$$

eller

$$x = -\theta + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z} .$$

## Ekvationen $\tan x = k$

Beträffande ekvationen

$$\tan x = k, \quad -\infty < k < \infty ,$$

antar vi att  $\theta$  är en lösning. Då skrivs samtliga lösningar enligt

$$x = \theta + n \cdot \pi \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \quad .$$

## Avslutande exempel

Lös ekvationen

- $\sin 2\theta = \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .
- $\sin x = 0,42$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$
- $\tan x = 2,14$ ,  $0 \leq x \leq 4\pi$

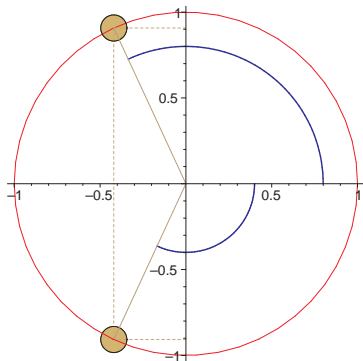


# Läs och lös på egen hand

■  $\cos x = -0,42, 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

## Lösningförslag-Tjuvkika inte

Vi använder enhetscirkeln, där vi markerar  $x$ -koordinaten  $-0,42$ .  
Linjen  $x = -0,42$  skär enhetscirkeln på två ställen.



Då skrivs samtliga lösningar enligt

$$x = \pm\theta + n \cdot 360^\circ, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Nu var vi intresserade av lösningar mellan  $0^\circ$  och  $360^\circ$ . Räknedosan ger närmevärdena

$$x \approx 114,8^\circ \text{ eller } x \approx -114,8^\circ.$$

Hmm...



## Poesihörnan

... Omsider fick jag en annan informator, som hette Höckert. Han slog mig på fingerstamparna med linealen, för det att jag ej ville kunna Euklides och den tidens metafysiska.

Hjärnan ännu i mig vrides.  
När jag tänker på Euklides  
Och på de trianglarna  
*ABC* och *CDA*.  
Svetten ur min panna gnides  
Värre än på Golgata.  
C-M Bellman ca 1760

