

Tentamen i Matematik I–Differentialkalkyl

Kurskod	M0038M
Tentamensdatum	2014-12-17
Skrivtid	09.00 – 14.00

Totala antalet uppgifter: 6

Betygsgränser: U:0–13, 3:14–19, 4:20–25, 5:26–30.

Resultatet meddelas via Mitt LTU.

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare.

*Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt presenterade att de blir svåra att följa. Även endast delvis lösta problem kan ge poäng.
Enbart svar ger 0 poäng.*

Uppgift 1

Avgör om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall följande gränsvärden:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x \cdot \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right) \right\} \quad (2 \text{ p})$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x^2 - 5x + 6} \quad (2 \text{ p})$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - x)}{x} \quad (2 \text{ p})$$

L'Hospitals regel får inte användas på ovanstående uppgifter.

Uppgift 2

(a) Lös ekvationen $\lg x = \lg 80 - \lg(x + 2)$. (3 p)

(b) Bestäm $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, t.ex. genom att utnyttja att $\frac{5\pi}{6} = \frac{4\pi}{12} + \frac{6\pi}{12}$.
Exakt svar, ej närmevärde. (1 p)

Uppgift 3

(a) Använd kvadratkomplettering för att bestämma minsta värdet av

$$x^2 - 3x + 1. \quad (2 \text{ p})$$

(b) Lös ekvationen

$$\frac{x + 3}{x - 1} + \frac{x - 4}{x - 6} = 2$$

Exakt svar, ej närmevärde. (2 p)

(c) Bestäm definitionsmängd till funktionen $f(x) = \sqrt{8 - 2x}$. (1 p)

Uppgift 4

- (a) Bestäm eventuella asymptoter, eventuella inflexionspunkter och eventuella lokala extrempunkter till funktionen

$$f(x) = x(x - 1)^2. \quad (4 \text{ p})$$

- (b) Skissa funktionskurvan $y = f(x)$, tillsammans med sina eventuella asymptoter, eventuella inflexionspunkter samt eventuella lokala extrempunkter. (1 p)

Uppgift 5

En kurva $y = y(x)$ definieras genom

$$\cos(xy) + y \sin x = 1.$$

Kurvan passerar genom punkten $P_0 : (\pi/2, 1)$. Beräkna ekvationen för tangenten i punkten P_0 . Exakt svar, ej närmevärde. (5 p)

Uppgift 6

Lös en och endast en av följande tre alternativa uppgifter.

Uppgift 6.1

Antag att $t = \tan \frac{x}{2}$, $x \in [0, \pi/2]$. Visa följande två identiteter:

- $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$
- $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$

Ledning: Använd trigonometriska omskrivningar. (5 p)

Uppgift 6.2

En ö är belägen i en punkt A , 4 km från den närmaste punkten O på fastlandet. Ett strandcafé B ligger längs den raka strandlinjen 4 km från punkten O . Kalixkillen Kalle är sommarboende på ön. Kalle kan ro med hastigheten 3 km/h och gå längs strandlinjen med hastigheten 5 km/h. Hur skall vår fiskasugne vän Kalle planera sin färd för att ta sig från ön till caféet på kortast möjliga tid, om de enda färdssätten är att ro och att gå? (5 p)

Uppgift 6.3

Ekvationen

$$\arctan x = \ln(1 + x)$$

har en rot nära $x = 2.5$. Bestäm denna rot med hjälp av Newton-Raphsons metod. Gör tre iterationer. Redovisa kalkylerna i tabellform. Svaret avrundas till 4 decimaler.

(5 p)