LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

OBSERVERA: DENNA TENTAMEN GÄLLER STUDENTER PÅ HÖGSKOLEINGENJÖRSPROGRAM

Tentamen i Matematik I–Differentialkalkyl

Kurskod	**M0038M**
Tentamensdatum	2015-10-28
Skrivtid	09.00 – 14.00

Totala antalet uppgifter: 6

Betygsgränser: **U**:0–13, **3**:14–19, **4**:20–25, **5**:26–30
Bonuspoäng adderas bara upp till 14 poäng, så bonusen påverkar inte betyg 4 och 5.

Resultatet meddelas via Mitt LTU.

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt presenterade att de blir svåra att följa. Även endast delvis lösta problem kan ge poäng.
Enbart svar ger 0 poäng.

Institutionen för teknikvetenskap och matematik

Uppgift 1

(a) Använd kvadratkomplettering för att finna centrum och radie för cirkeln

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y = 4$$ (2 p)

(b) Bestäm alla lösningar till

$$\sqrt{3x+7} - x = 1$$ (2 p)

(c) Finn de x för vilka nedanstående olikhet gäller

$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{x+1}{x-1}$$ (2 p)

Uppgift 2

(a) Lös ekvationen

$$5^x - 8 \cdot 5^{-x} = 2$$ (2 p)

(b) Finn alla vinklar x som löser ekvationen

$$\sin 2x = \sqrt{3}\cos x$$ (2 p)

Uppgift 3

Givet

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

(a) Bestäm derivatan $f'(x)$ genom att använda derivatans definition. (2 p)

(b) Finn också derivatan $f'(x)$ genom att använda deriveringsregler. (1 p)

Uppgift 4

Bestäm tangenten till kurvan

$$\pi(x^2 + y^2) = 8\arctan(y)$$

i punkten $(x, y) = (1, 1)$. (4 p)

Uppgift 5

Givet

$$f(x) = \frac{(x^2-1)(x+3)}{x^3-x^2}$$

(a) Bestäm

$$\lim_{x\to 1} f(x) \qquad \text{(1 p)}$$

(b) Förenkla uttrycket för $f(x)$ så funktionen blir kontinuerlig för $x = 1$, men oförändrad för övriga x. Finn sedan alla asymptoter samt alla lokala maxima och minima. (4 p)

(c) Skissa kurvan som ges av $y = f(x)$. (1 p)

Uppgift 6

Givet

$$f(x) = \frac{\ln x + x}{x}$$

(a) Bestäm

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \qquad \text{(1 p)}$$

(b) Finn alla lokala extrempunkter till $f(x)$ då $1 \le x \le 4$. (3 p)

(c) Finn en approximation till det x som uppfyller $f(x) = 0$ genom att använda Newton-Raphsons metod med $x_0 = 1/2$ som startgissning. Redovisa hur nästa tal i talföljden beräknas mha det föregående talet, samt en tabell med talföljden för 4 iteration. Använd 5 decimalers noggrannhet. (3 p)

M0038M - 151028

1a

$$x^2-4x+y^2+2y=4$$

$$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1=4$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=9$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=3^2$$

Svar: Cirkel med centrum i $(x,y)=(2,-1)$ och radie 3.

1b

$$\sqrt{3x+7}-x=1 \qquad (*)$$

$$\sqrt{3x+7}=x+1$$

Kvadrera, (risk för falska rötter)

$$3x+7=(x+1)^2$$

$$3x+7=x^2+2x+1$$

$$0=x^2-x-6$$

pq-formeln

$$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\underbrace{6}_{=\frac{24}{4}}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}$$

$x=\frac{6}{2}=3$ eller $x=-\frac{4}{2}=-2$

sätt in i $(*)$

$$\sqrt{3\cdot 3+7}-3=1 \qquad\qquad \sqrt{3\cdot(-2)+7}-(-2)=1$$

$$1=1 \qquad\qquad 3=1$$

ok! Falsk utsaga dvs falsk rot

Svar: $x=3$

1c

$$\frac{x-1}{x+1}<\frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}<0$$

$$\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}-\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}<0$$

$$\frac{x-2x+1-(x+2x+1)}{(x+1)(x-1)}<0$$

$$\frac{\cancel{x}-2x+\cancel{1}-\cancel{x}-2x-\cancel{1}}{(x+1)(x-1)}<0$$

$$\frac{-4x}{(x+1)(x-1)}<0$$

		-1		0		1	
$-4x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{-4x}{(x+1)(x-1)}$	$+$	ej def.	$-$	0	$+$	ej. def.	$-$

Så $\frac{-4x}{(x+1)(x-1)}<0$ exakt då

$-1<x<0$ eller $x>1$

M0038M - 151028

2a

$$5^x - 8\cdot 5^{-x} = 2$$

$$5^x - \frac{8}{5^x} = 2$$

Variabelbyte: $t = 5^x$

$$t - \frac{8}{t} = 2$$

$$t^2 - 8 = 2t$$

$$t^2 - 2t - 8 = 0$$

pq-formeln

$$t = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3$$

$t = 4$ eller $t = -2$

$5^x = 4$ $\qquad$ $5^x = -2$

$\ln 5^x = \ln 4$ $\qquad$ lösning saknas eftersom $5^x > 0$.

$$x \cdot \ln 5 = \ln 4$$

$$x = \frac{\ln 4}{\ln 5}$$

Svar: $x = \frac{\ln 4}{\ln 5}$

2b

$$\sin 2x = \sqrt{3}\cos x$$

$$2\sin x\cos x = \sqrt{3}\cos x$$

$$2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos x = 0$$

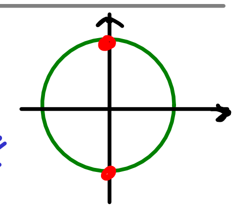
$$2\cdot\cos x\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

dvs

$\cos x = 0$ eller $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- $\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

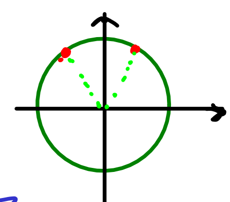


- $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{\pi}{3} + n2\pi$

eller $\qquad n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{2\pi}{3} + n2\pi$



Svar: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ eller $x = \frac{\pi}{3} + n2\pi$ eller $x = \frac{2\pi}{3} + n2\pi, \ n \in \mathbb{Z}$

3a

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^2+1} - \sqrt{x^2+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{(x+h)^2+1} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1}\right)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{((x+h)^2+1) - (x^2+1)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 \cancel{+1} \cancel{-x^2} \cancel{-1}}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2x + h}{\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{2x+0}{\sqrt{(x+0)^2+1} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leftarrow \text{Svar}$$

3b

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

M0038M-151028

4 Tangenten till

$$\pi(x^2+y^2) = 8\cdot\arctan y \quad i \quad (x,y)=(1,1)$$

Derivera map x givet $y=y(x)$.

$$\pi(2x+2yy') = 8\cdot\frac{1}{1+y^2}\cdot y'$$

sätt in $(x,y)=(1,1)$

$$\pi(2\cdot1+2\cdot1\cdot y') = 8\cdot\frac{1}{1+1^2}y'$$

$$2\pi+2\pi\cdot y' = 4y'$$

$$\pi+\pi y' = 2y'$$

$$\pi y' - 2y' = -\pi$$

$$(\pi-2)y' = -\pi$$

$$y' = -\frac{\pi}{\pi-2} \quad i \quad (x,y)=(1,1)$$

ger tangent

$$y-1 = -\frac{\pi}{\pi-2}(x-1)$$

$$y = -\frac{\pi}{\pi-2}x+\frac{\pi}{\pi-2}+1$$

Svar: $y = -\frac{\pi}{\pi-2}x + 2\frac{\pi-1}{\pi-2}$

5a

$$\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)(x+3)}{x^3-x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x+3)}{x^2\cancel{(x-1)}} = \frac{(1+1)(1+3)}{1^2} = 8$$

5b

$$f(x) = \frac{(x^2-1)(x+3)}{x^3-x^2} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x+3)}{x^2\cancel{(x-1)}} = \frac{(x+1)(x+3)}{x^2} \quad \text{då } x\neq1$$

Bilda

$$\hat{f}(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{x^2} = \frac{x^2+4x+3}{x^2}$$

som $=f(x)$ men också existerar i $x=1$
(kontinuerlig utvidgning)

- Lodräta asymptoter för $\hat{f}(x)$

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^2+4x+3}{x^2} = \left[\frac{3}{0+}\right] = \infty, \quad \lim_{x\to0-}\frac{x^2+4x+3}{x^2} = \left[\frac{3}{0+}\right] = \infty$$

dvs lodrät asymptot i $\boxed{x=0}$.

- Vågräta asymptoter

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+3}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}(1+\overset{\to0}{\frac{4}{x}}+\overset{\to0}{\frac{3}{x^2}})}{\cancel{x^2}} \approx 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x+3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}(1+\overset{\to0}{\frac{4}{x}}+\overset{\to0}{\frac{3}{x^2}})}{\cancel{x^2}} \approx 1$$

dvs vågrät asymptot i $\boxed{y=1}$

då $x\to\pm\infty$

- Lokala max och min

$$\hat{f}'(x) = \frac{(2x+4)\cdot x^2 - (x^2+4x+3)\cdot 2x}{x^4} = \frac{(2x+4)\cdot x - (x^2+4x+3)\cdot 2}{x^3}$$

$$= \frac{\cancel{2x^2}+4x-\cancel{2x^2}-8x-6}{x^3} = \frac{-4x-6}{x^3} = \frac{(-2)(2x+3)}{x^3}$$

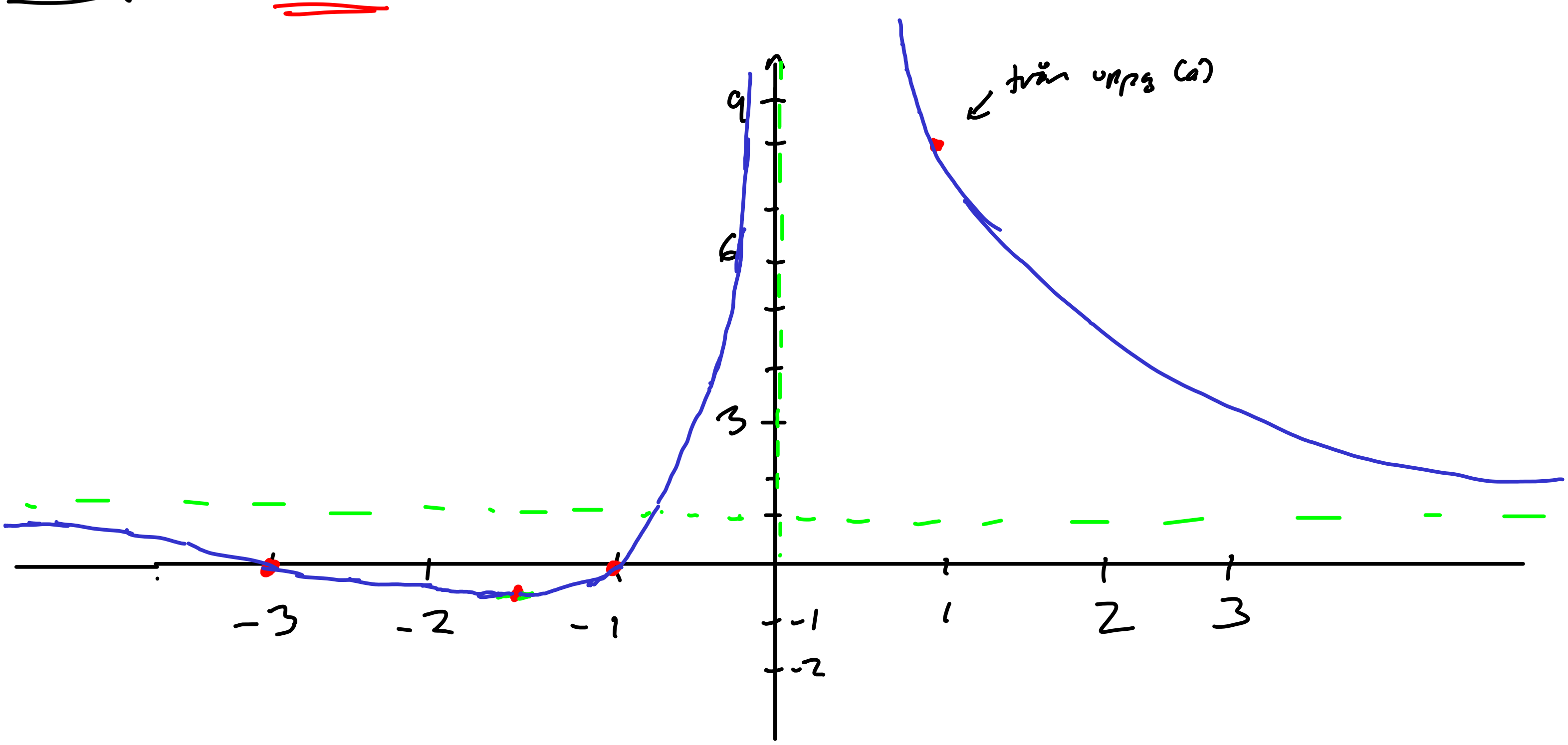
stationär- pkt, $\hat{f}'(x)=0$, i $x=-3/2$. Ej definierad i $x=0$.

	$x<-3/2$	$-3/2$	$-3/2<x<0$	0	$x>0$
-2	$-$		$-$		$-$
$2x+3$	$-$	0	$+$		$+$
x^3	$-$		$-$	0	$+$
$\hat{f}'(x)$	$-$	0	$+$	ej def	$-$
$\hat{f}(x)$	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$	|	$\searrow$

$$\hat{f}\left(-\tfrac{3}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{6}{2}}{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{3}$$, dessutom $\hat{f}(-3)=0$, $\hat{f}(-1)=0$

$\boxed{5c}$

- Skiss:



M0038M - 151028

6a

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} + 1\right) = 0+1 = 1$$

6b

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot x - (\ln x + x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1 + \cancel{x} - \ln x - \cancel{x}}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Stationär pkt $f'(x)=0$, dvs $1-\ln x = 0$, $\ln x = 1$ | $e^{\ln x} = e^1$, $\boxed{x = e^1}$

På slutna intervallet $1 \le x \le 4$ gäller att

	1		e^1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
	lok. min		lok. max.		lok. min.

Svar:

	x	$f(x)$	
lok. min	1	$\frac{\ln 1 + 1}{1} = 1$	← minsta värde
lok. max	e^1	$\frac{\ln e^1 + e^1}{e^1} = \frac{1+e}{e}$	← största värde
lok. min	4	$\frac{\ln 4 + 4}{4} = \frac{2\ln 2 + 4}{2} = \frac{\ln 2 + 2}{2}$	

6c

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{\ln(x_n)+x_n}{x_n}}{\frac{1-\ln(x_n)}{x_n^2}}$$

$$= x_n - \frac{x_n(\ln(x_n)+x_n)}{1-\ln(x_n)}$$

Svar:

$x_0 = 0.5$

$x_1 = 0.55704$

$x_2 = 0,56691$

$x_3 = 0.56714$

$x_4 = 0.56714$