ÖVNINGAR
I
ANALYS I EN VARIABEL

Göran Forsling

2001

Innehåll

1 Inledning

1.1. Kvadratkomplettera följande uttryck.

a) x^2+2x+1 b) x^2-6x c) $2x^2+2x-1$ d) $1+x-x^2$

T 1.2. a) Bestäm minsta värdet av funktionen $f(x)=x^2-3x+2$.

b) Lös ekvationen $x^2-3x+2=0$.

c) För vilka x gäller olikheten $x^2-3x+2\geq 0$?

d) Rita kurvan $y=x^2-3x+2$.

1.3. Lös ekvationen $\sqrt{x^2+4x+4}=x+2$.

1.4. Lös ekvationssystemen

a) $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & a \\ x & - & y & = & b \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 6 \\ x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & z & = & 7 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{ccc} x-y^2-1 & = & 0 \\ 2y-xy & = & 0. \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{ccc} x^2+y^2 & = & 5 \\ 2xy & = & 4 \end{array}\right.$

T L 1.5. För vilka x gäller olikheterna

a) $(x-1)^2>4$ b) $\dfrac{(2x-1)(x+3)}{x+5}\geq 0$ c) $\dfrac{1+2x-3x^2}{2x^2-5x+2}\leq 0$?

T 1.6. Visa att $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ om $x>0$.

1.7. Låt a och b vara två positiva tal. Då definieras det *aritmetiska medelvärdet* som $A=\dfrac{a+b}{2}$ och det *geometriska medelvärdet* som $G=\sqrt{ab}$. Visa att $A\geq G$ genom att utgå från olikheten $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$. När gäller likhet?

1.8. Bestäm alla x som uppfyller a) $|x-1|=3$ b) $\left|\dfrac{2x-1}{x+1}\right|=3$.

1.9. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $|x^2-6x+5|=9-3x$.

T 1.10. Lös olikheterna

a) $|2x+5|<8$ b) $|x|+|x-1|\leq 3$ c) $\left|\dfrac{2x^2+6x-15}{2x-9}\right|<1$.

L 1.11. Visa med hjälp av triangelolikheten att om $y=x^7-2x^3+5x^2-1$ och $-1\leq x\leq 1$ så gäller att $-9\leq y\leq 9$.

1.12. Bestäm kvot och rest vid följande polynomdivisioner:

a) $\dfrac{x^5+3x^4-2x^3+2x-1}{x^3+x+1}$ b) $\dfrac{x^6-1}{x-1}$ c) $\dfrac{x^4+2x^3+25}{x^2+4x+5}$

1.13. Bestäm resten då polynomet $x^{100} - 2x^{10} + 1$ divideras med

a) $x - 1$ b) $x + 2$ c) $x + 1$

1.14. Faktorisera polynomen i reella faktorer

a) $x^2 - 1$ b) $x^3 + 1$ c) $x^4 - 1$ d) $x^4 + 27x$ e) $x^6 - 64$.

1.15. Förenkla

a) $\dfrac{\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + 2}{\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}}$ b) $\dfrac{a+3}{2a - \dfrac{a}{a - \dfrac{a^2-2}{1+a}}}$ c) $\dfrac{x - x^3}{x^3 + x^2} \Big/ \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x}$

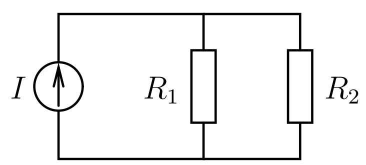
1.16. Antag att $|x + 3| < 0.01$. Visa att $|x - 1| < 5$ och $|x^2 + 2x - 3| < 0.05$.

L 1.17. Visa att om $|x - 2| < 0.01$ och $|y - 3| < 0.02$ så är $|xy - 6| < 0.08$.

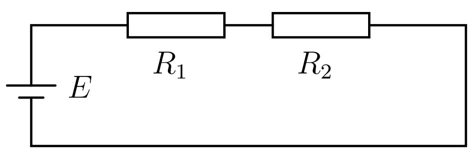
1.18. I många fysikaliska sammanhang dyker sambandet $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ upp. Talen a och b är positiva storheter. Om t ex två elektriska motstånd med resistanserna a resp b parallellkopplas kommer denna krets att ha motståndet y. Om man i stället betraktar en lins med brännvidd y så beskriver formeln ovan sambandet mellan ett objekts avstånd, a, till linsen och bildens avstånd, b, till linsen.
Lös ut y ur sambandet. Vad kan sägas om y jämfört med a och b?

1.19. Några övningar i kretselektronik:

a) Beräkna strömmen genom motståndet R_1 (strömdelning) i vidstående likströmskrets.



b) Beräkna spänningen över motståndet R_1 (spänningsdelning) i vidstående likströmskrets.



1.20. Förenkla följande uttryck (som vi kommer att stöta på igen längre fram i häftet).

a) $\dfrac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ b) $\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}$

1.21. Skriv med summatecken

a) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{10}$

b) $2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (n+1)$

c) $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243$.

1.22. Beräkna a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^3$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}(k^2-3k)$ c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{100} 3$ d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

1.23. Beräkna

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3\cdot 2^{-k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-k}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{100} 1000\cdot(1.05)^n$ d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{5}\frac{k\,(-1)^k}{2^k}$

1.24. Beräkna summan av alla heltal mellan 1 och 100, som är jämnt delbara med 3.

1.25. På ett schackbräde staplar man poletter som var och en har en tjocklek på 1 mm. Man lägger en polett på första rutan, två på den andra rutan, fyra på den tredje o s v, så att man på varje ny ruta lägger dubbelt så många poletter som på föregående ruta.

a) Hur hög blir traven på den sista rutan?

b) Varje polett betingar ett värde av 1 öre. Hur stor förmögenhet har man samlat på ett bräde?

L 1.26. Linus tar ett lån på 10'000 kr i Västbanken. Räntan på lånet är 10% och lånetiden är 10 år. I slutet av varje år skall Linus betala årets ränta samt amortering. Han får välja på två alternativ:

a. han amorterar lika mycket varje år

b. han väljer ett annuitetslån, så att han betalar samma summa (dvs ränta + amortering) varje år.

a) Hur mycket amorterar han varje år enligt alternativ 1?

b) Hur mycket betalar han varje år enligt alternativ 2?

c) Hur mycket har han sammanlagt betalat i ränta då hela lånet är återbetalt?

1.27. Bestäm antalet heltal i intervallet $[1, 101]$ som

a) är delbara med 3 b) är delbara med 5 c) varken är delbara med 3 eller 5.

L 1.28. Visa att om $x > 0,\ y > 0$ så är $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$.

T 1.29. Summan av två positiva tal är 6. Hur stor kan deras produkt bli?

1.30. Hur stor area kan en rektangel som högst ha, om dess omkrets är 10 m? Vilken form har rektangeln när arean är som störst?

1.31. En båt till England går halva sträckan med farten v och den andra halvan med farten V. En annan båt går halva tiden med farten v och den andra halvan med farten V. Beräkna medelfarterna H respektive A för de båda båtarna. Vilken av dem är snabbast?

L 1.32. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)\ ,\ n \in \mathbf{Z}_+$.

1.33. Visa att $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2\ ,\ n \in \mathbf{Z}_+$.

1.34. Visa att $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}\ ,\ n \in \mathbf{Z}_+$. **L**

T 1.35. Visa att $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ ,\ n \in \mathbf{Z}_+$.

1.36. Visa att $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2\ ,\ n \in \mathbf{Z}_+$.

1.37. Bestäm en allmän formel för summan av $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ uttryckt i n, samt bevisa att formeln gäller för alla positiva heltalsvärden på n.

1.38. Låt $a_1 = a_2 = 1$ och $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ för $n > 2$. Visa att $a_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$, där $\alpha,\ \beta$ är rötterna till ekvationen $x^2 - x - 1 = 0$.

1.39. Visa att $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$.

1.40. Visa att $2^n \geq n^2$ för alla heltal $n \geq 4$.

1.41. Beräkna $0!\,,\ 1!\,,\ 2!\,,\ \ldots\ ,\ 6!\,$.

L 1.42. Beräkna a) $\binom{5}{2}$ b) $\binom{9}{2}$ c) $\binom{9}{5}$ d) $\binom{9}{7}$ e) $\binom{1000}{998}$

1.43. Beräkna a) $\binom{6}{2} + \binom{6}{4}$ b) $\binom{9}{8} + \binom{9}{7}$ c) $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$

1.44. Förenkla a) $\binom{n}{2}$ b) $\binom{n+1}{n-1}$ c) $\binom{n}{n-3}$

1.45. Bestäm

a) antalet möjliga lottorader
b) antalet möjliga stryktipsrader
c) antalet möjliga måltipsrader
d) antalet möjliga pokerhänder.

1.46. Utveckla följande uttryck.

a) $(1+x)^3$ b) $(3-2x)^3$ c) $(1+x)^4$

1.47. Ange koefficienten till x^{13} i a) $(x+1)^{15}$ b) $\left(x^3 + \dfrac{2}{x}\right)^7$.

1.48. Koefficienten för x^6 i utvecklingen av $(a+2x)^8$ är 112. Vilka värden kan konstanten a anta?

1.49. Formulera binomialsatsen och bevisa den med hjälp av induktion.

2 Komplexa tal

2.1. Bestäm $\operatorname{Re} z$ och $\operatorname{Im} z$ då z är

a) $1-4i$ b) $-1+2i$ c) 7 d) i e) $-4i$.

Rita ut talen i det komplexa talplanet.

2.2. Skriv följande tal på formen $a+ib$ där a och b är reella tal.

a) $(1-i)+(-5+3i)$ b) $(2+i)-(5-4i)$ c) $(2+i)(1-2i)$

d) $(1+i)^2$ e) $(3-i)^3$ f) $(4+i)(4-i)$

2.3. Sätt $z_1=-2+3i$ och $z_2=4-5i$, samt beräkna

a) z_1+z_2 b) z_1-z_2 c) $z_1\cdot z_2$ d) z_1^2 e) z_2^3 f) $z_1\cdot z_2^2$

2.4. Beräkna $2+3z+4z^2$ då $z=1+i$.

2.5. Beräkna

a) $\overline{1+2i}$ b) $\overline{2-7i}$ c) $\overline{-3}$ d) $(1-i)\overline{(1-i)}$

e) $|1-i|$ f) $|i|$ g) $|1-2i|$ h) $|-2i|$

2.6. Beräkna $z\cdot\overline{z}$ då

a) $z=2+4i$ b) $z=a+bi$ där a och b är reella.

2.7. Skriv på formen $a+ib$, där $a,b\in\mathbf{R}$:

a) $z_1=\dfrac{1}{1-i}$ b) $z_2=\dfrac{1}{3+2i}$ c) $z_3=\dfrac{1-i}{1+i}$ d) $z_5=\dfrac{1}{(1-i)^2}$ e) $z_6=\dfrac{1}{i}$

2.8. Låt $z=2+3i$. Beräkna absolutbeloppet av

a) z b) $\overline{z}$ c) z^2

2.9. Låt $z=a+ib$ och $w=c+id$ där a, b, c och d är reella tal. Beräkna

a) $\left|\dfrac{1}{z}\right|$ och $\dfrac{1}{|z|}$ b) $|z\cdot w|$ och $|z|\cdot|w|$.

2.10. Beräkna absolutbeloppen av talen

T a) $z_1=(3-4i)^{12}$ b) $z_2=\dfrac{(3+i)(5-i)}{(4+3i)(-3+2i)}$ c) $z_3=\dfrac{-i(7+i\sqrt{3})^2}{(5+i)^2}$.

T 2.11. Lös ekvationen $2iz-4\overline{z}=2i-7$.

2.12. Tolka i komplexa talplanet relationerna

a) $\operatorname{Re} z=-2$ b) $\operatorname{Im} z=4$ c) $\operatorname{Re} z>0$ d) $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z=2$

2.13. Tolka geometriskt följande relationer

a) $|z|=2$ b) $|z-1|=3$ c) $|z-1+2i|=1$

d) $|z|\le 3$ e) $|z|>3$ f) $2\le|z+3|\le 4$.

T 2.14. Uttryck med hjälp av z och $\overline{z}$, utan användning av absolutbelopp

a) $|z|^2$ b) $|z-1|^2$

2.15. Bestäm alla komplexa tal z för vilka $|z-1| = |z+1|$.

2.16. Bestäm alla komplexa tal z för vilka $|z-1| = 2|z+1|$.

L 2.17. Låt z vara ett komplext tal sådant att $z + \frac{1}{z}$ är reellt. Visa att z ligger på enhetscirkeln, $|z| = 1$, eller på reella axeln.

2.18. Visa att det komplexa talet z uppfyller villkoret $|z| < 1$ om och endast om $\left|\frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{z}{2}}\right| < 1$.

2.19. Skriv följande tal på polär form

a) $z = 2$ b) $z = -3$ c) $z = -i$

d) $z = -1 - i$ e) $z = 1 + i\sqrt{3}$ f) $z = 3i - \sqrt{3}$

2.20. Skriv följande tal på formen $a + bi$.

a) $3e^{\frac{\pi}{3}i}$ b) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

T 2.21. Beräkna argumentet för a) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{(1+i)^3}$ b) $\dfrac{17i(2-2i)}{(1-i\sqrt{3})(2\sqrt{3}+2i)}$.

2.22. Vad är beloppet av $e^{i\phi}$, om ϕ är reellt?

T 2.23. Beräkna

a) $(1+i)^4$ b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)^5$ c) $(1+i\sqrt{3})^{100}$

2.24. Argumentet för z är $\pi/6$ och argumentet för w är $\pi/5$.

a) Bestäm ett argument till zw.

b) Bestäm ett argument till z/w.

c) Kan man säga vad argumentet för $z + w$ är?

2.25. Då man analyserar elektriska kretsar som matas med sinusformade spänningar, används ofta den s k $j\omega$-metoden (j är det komplexa tal som vi kallar i). Till en fysisk ström

$$i(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

tillordnas en komplex ström I på så vis att

$$|I| = A \quad \text{och} \quad \arg I = \delta.$$

Beräkna $i(t)$ då $\omega = 100$ och $I = \dfrac{1}{10}\dfrac{1-j}{\sqrt{3}+j}$.

T 2.26. Uttryck $\cos 5\theta$ med hjälp av $\cos\theta$.

2.27. Använd de Moivres formel för att uttrycka $\cos 3\theta$ och $\sin 3\theta$ med hjälp av $\cos\theta$ och $\sin\theta$.

2.28. Använd Eulers formler för att härleda ett uttryck för $\sin\alpha\,\sin\beta$.

2.29. Uttryck $\cos^4\theta$ med hjälp av cosinus för multipla vinklar. **L**

2.30. Som bekant har ekvationen $\cos x = 0$ endast de reella lösningarna $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$. Om $z = x + iy$ så definieras

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

(jfr Eulers formler). Lös ekvationen $\cos z = 0$.

2.31. Bestäm $|z|$ då z uppfyller sambandet $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{i\omega L}$ där R, ω och L är positiva.

2.32. En elektrisk krets består av ett motstånd med resistans R, en spole med induktans L och en kondensator med kapacitans C kopplade i serie. Kretsen matas med en sinusformad växelspänning U med vinkelfrekvensen ω. Den totala impedansen för kretsen är

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}.$$

Hur stor skall ω vara, uttryckt i R, L och C, för att Z skall vara reell (rent resistiv)? Hur stor är i så fall Z?

2.33. Om vi istället parallellkopplar motståndet och kondensatorn i kretsen i föregående uppgift, blir induktansen

$$Z = i\omega L + \frac{R/(i\omega C)}{R + 1/(i\omega C)}.$$

Skriv Z på formen $a + ib$. Kan Z bli rent reell för något val av ω? Hur stort är i så fall ω?

T 2.34. Talen i det komplexa talplanet vrids vinkeln $\pi/2$ i positiv led (d v s moturs) kring origo. I vilka tal övergår i och $-1 + 5i$?

2.35. Beräkna $|e^{x+iy}|$ då x och y är reella.

2.36. Visa att $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$ för alla komplexa tal z, w. Tolka sambandet geometriskt.

2.37. Lös ekvationerna

a) $z^2 = -16$ b) $(z+3)^2 = -1$ c) $4z^2 + 9 = 0$

T 2.38. Lös ekvationerna

a) $z^2 = 1 - i\sqrt{3}$ b) $z^2 = 5 + 12i$.

T 2.39. Lös ekvationerna

a) $z^2 + 8z + 25 = 0$ b) $5z^2 + 2z + 10 = 0$ c) $z^2 - 2iz - 2 = 0$

L 2.40. Lös ekvationerna

a) $z^2 + (1 - 2i)z - i - 1 = 0$ b) $2z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 3i = 0$

c) $(2 + i)z^2 + (2 - 4i)z = 4 + 2i$ d) $iz^2 - 4z - 3i = 0$.

T L 2.41. Lös ekvationerna

a) $z^3 = 8$ b) $z^3 = -i$ c) $z^4 = -16$

d) $z^3 = 1 - i$ e) $z^6 = -8$ f) $z^3 = i\sqrt{3} - 1$

2.42. Lös ekvationen $(z + i)^4 = (z - 1)^4$.

T 2.43. Bestäm alla lösningar till ekvationen $z^3 = \overline{z}$.

T 2.44. Ange samtliga rötter till ekvationen $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$.

2.45. Ange samtliga lösningar till följande ekvationer.

a) $z^3 + z + 10 = 0$ b) $z^3 + 5z^2 + 7z - 13 = 0$

2.46. Bestäm samtliga nollställen till funktionerna

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ b) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 12$
c) $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 7x - 30$.

2.47. Polynomet $P(z) = z^5 - 10z^2 + 15z - 6$ har nollstället 1. Bestäm nollställets multiplicitet. Skriv sedan polynomet som en produkt av förstagradsfaktorer.

2.48. Faktorisera följande uttryck i reella faktorer av lägsta möjliga gradtal.

a) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ b) $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12$ c) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$

2.49. Bestäm alla lösningar, reella såväl som komplexa, till ekvationen $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$.

2.50. Ekvationen $z^4 + 4z^3 - 8z + 20 = 0$ har rötterna $z = 1 + i$ och $z = -3 + i$. Lös ekvationen fullständigt.

2.51. Bestäm de reella talen $a_0, a_1, \ldots, a_5$ så att polynomet $P(z) = z^6 + a_5z^5 + \cdots + a_0$ har ett enkelt nollställe i $1 + 2i$ och ett dubbelt i $-i$.

T 2.52. Faktorisera $x^4 + 4$ i reella faktorer med så lågt gradtal som möjligt.

2.53. Andragradsekvationen $x^2 + ax + b = 0$ har rötterna x_1 och x_2.

a) Visa att $x_1 + x_2 = -a$ och $x_1x_2 = b$.

b) Hur ser motsvarande samband mellan rötter och koefficienter ut i en tredjegradsekvation, $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ med rötter x_1 , x_2 och x_3?

T 2.54. Låt z_1 och z_2 vara rötterna till ekvationen $z^2+(1-7i)z-4i=0$. Beräkna $z_1^2+z_2^2$.

2.55. Låt z_1 och z_2 vara rötterna till ekvationen $z^2+az+b=0$. Bestäm en andragradsekvation, vars rötter är z_1^2 och z_2^2.

2.56. Ekvationen $z^4-2z^3+6z^2-8z+8=0$ har en rent imaginär rot. Lös ekvationen fullständigt.

2.57. Visa att man kan bestämma konstanten a så att polynomet

$$P(x)=x^4+ax+4$$

är delbart med x^2-2x+2. Bestäm därefter alla nollställen till $P(x)$ för detta värde på a.

2.58. Ekvationen $z^4+2z^3+2z^2+10z+25=0$ har en rot med realdel –2. Lös ekvationen fullständigt.

2.59. Hur många nollställen (reella såväl som komplexa) i enhetscirkeln $|z|<1$ har ekvationen $2z^3+2z+1=0$?

2.60. Att lösa en allmän tredjegradsekvation, $x^3+ax^2+bx+c=0$ är ganska besvärligt, men det är genomförbart. Ett möjligt tillvägagångssätt är följande:

1. Gör en kubkomplettering, dvs samla de termer som som innehåller x^3 och x^2 i en kub. Då fås ekvationen $\left(x+\frac{a}{3}\right)^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)x+c-\frac{a^3}{27}=0$. Byt därefter variabler $z=x+\frac{a}{3}$ så erhåller man en ekvation av formen $z^3+a_1z+a_2=0$ d v s en ekvation utan z^2-termer.
2. Ansätt $z=w+\frac{r}{w}$ och välj r på ett listigt sätt, nämligen $r=-\frac{a_1}{3}$ så fås efter omskrivning en ekvation av typen $w^6+b_1w^3+b_2=0$ d v s en andragradsekvation i w^3.
3. Sätt $t=w^3$ och lös andragradsekvationen $t^2+b_1t+b_2=0$.
4. Lös succesivt ut w, z och x ur dessa samband.

Vi tittar på ett exempel där det första steget redan är utfört, ekvationen $x^3+x+1=0$.

a) Gör variabelbytet $x=w-\dfrac{1}{3w}$.

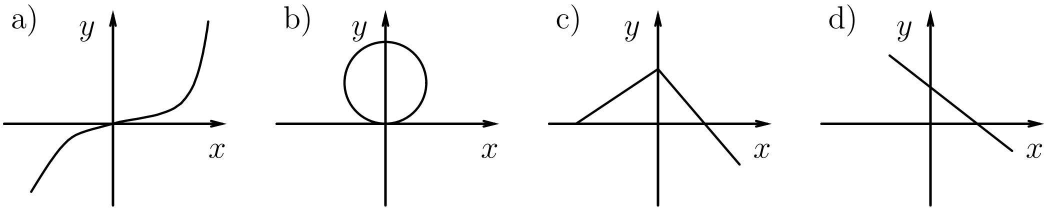
b) Sätt $w^3=t$ och lös den andragradsekvation du fått.

c) Bestäm w.

d) Bestäm x.

3 Funktioner

3.1. Vilka av nedanstående figurer visar grafen till en funktion?



3.2. En funktion f definieras genom sambandet $f(x) = 7x - 2$, $x \in \mathbf{R}$. Bestäm

a) $f(2)$ b) (-3) c) $f(x+2)$ d) $f(f(3))$

3.3. Bestäm definitions- och värdemängd till följande funktioner

a) $2 + x^2$ b) $\sqrt{x-7}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{3x+2}}$ d) x^3 e) $\sqrt{x} - 1$ f) $\dfrac{1}{x+2}$

3.4. Rita graferna till $f(x) = kx^2$ för $k = 1, -1, 2, 0.5$ i samma koordinatsystem. Slutsats?

3.5. Rita graferna till $f(x) = x^2 + b$ för $b = 0, 2, -3$ i samma koordinatsystem. Slutsats?

3.6. Rita graferna till $f(x) = (x-a)^2$ för $a = 0, 2, -4$ i samma koordinatsystem. Slutsats?

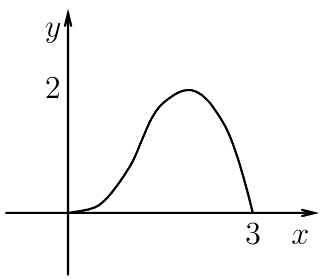
3.7. Om $f(x) = 0$ precis då $x = 2$ eller $x = 4$, för vilka värden på x är då $f(4x) = 0$?

3.8. Bestäm värdemängden till funktionerna

a) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ b) $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$ c) $f(x) = x^2 + px + q$

där $x \in \mathbf{R}$.

3.9. Grafen till funktionen $f(x)$ visas i nedanstående figur.

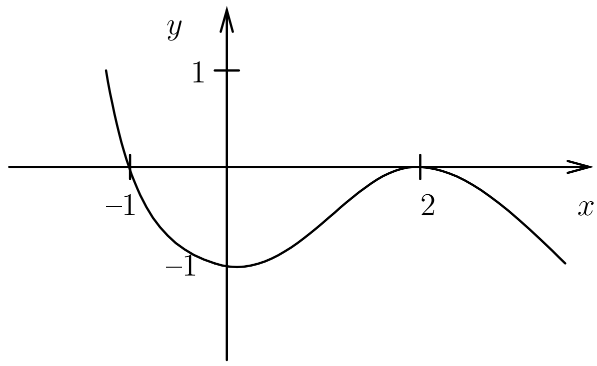


Funktionen har definitionsmängden $[0, 3]$ och värdemängden $[0, 2]$. Rita grafen samt bestäm definitionsmängd och värdemängd till

a) $f(x) + 2$ b) $f(x) - 3$ c) $f(x+1)$ d) $f(x-2)$ e) $f(-x)$

f) $-f(x)$ g) $2f(x)$ h) $f(2x)$ i) $f(x/2)$

3.10. Kurvan $y = f(x)$ har utseendet enligt figuren nedan.

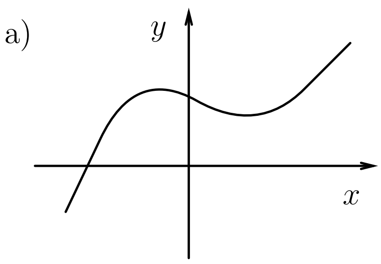


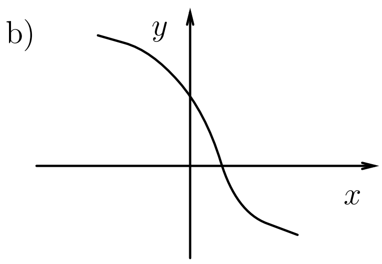
Beskriv och rita följande kurvor.

a) $y = f(x) - 1$ b) $y = f(x-1)$ c) $y = \frac{1}{2}f(x)$
d) $y = f(2x)$ e) $y = -f(x)$ f) $y = f(-x)$

3.11. Utgå från kurvan i uppgift 3.10. Beskriv samt rita kurvorna $y = f(|x|)$ och $y = |f(x)|$.

T 3.12. Vilka av nedanstående figurer visar grafen till en funktion som är injektiv, d v s som har invers?





L 3.13. Bestäm, om möjligt, inversen till följande funktioner.

a) $f(x) = 2x + 3$ b) $f(x) = \frac{2}{3}x - 4$ c) $f(x) = e^{2x}$

d) $f(x) = 3\ln x$, $x > 0$ e) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $x \neq 1$ f) $f(x) = x^2$

g) $f(x) = x^3$ h) $f(x) = \sqrt{x-1}$

3.14. Bestäm den inversa funktionen till $f(x) = 2\ln(3x^3 + 1)$.

3.15. En funktion f har inversen g. Om $f(2) = 0$ och $f(4) = 3$, bestäm

a) $g(0)$ b) $g(3)$ c) $g(f(2))$ d) $f(g(3))$

3.16. Ange värdemängden till $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $x \neq -2$. Är funktionen monoton, injektiv eller begränsad? Ange inversen om den existerar.

T 3.17. Rita grafen till funktionen $f(x) = |x-2| + |x+3|$, $x \in \mathbf{R}$ och svara få följande frågor.

a) Är f monoton? b) Är f injektiv?
c) Är f begränsad? d) Är f nedåt begränsad?

3.18. Ange för var och en av följande funktioner om den är monoton, injektiv, uppåt begränsad, nedåt begränsad eller begränsad.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $x \neq 0$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x > 0$

c) $f(x) = e^{4-3x^2}$, $x \geq 1$ d) $f(x) = \ln x$, $0 < x < e$

L 3.19. Rita funktionen $f(x) = x^2 + 2x + |x^2 - 2x - 3|$, $x \in \mathbf{R}$. Ange dess största och minsta värde (om sådana finns).

3.20. Sätt $f(x) = 3x^2 - 7$ och $g(x) = 4x^2$. Bestäm $f(g(x))$ och $g(f(x))$.
Är $f(g(x)) = g(f(x))$?

T 3.21. Sätt $f(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbf{R}$ och $g(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$. Bestäm f^{-1} , $f \circ g$, $g \circ f$ samt $f^{-1} \circ g$.

L 3.22. Avgör vilka av följande funktioner som är udda, jämna resp varken udda eller jämna.

a) x^4 b) x^5 c) $x^2 - 3x + 1$ d) $x(e^x - e^{-x})$ e) $x\sqrt{x}$

3.23. Beräkna $(2^3)^2$, $2^{(3^2)}$, $\dfrac{2^{1/2} \cdot 2^{1/3}}{2^{-1/6}}$, $2^{1/\ln 2}$ och ${}^3\log 2 \cdot {}^2\log 3$.

3.24. Rita funktionerna $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$ för $\alpha = 2,\ 4,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}$ i ett koordinatsystem och för $\alpha = -2,\ -4,\ -\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{4}$ i ett annat.

3.25. Ordna talen $\ln 2$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\sqrt[3]{6}$ och $\sqrt{e}$ i storleksordning.

3.26. Vilka av följande räknelagar är sanna?

a) $a^x a^y = a^{x+y}$ då $a > 0$ b) $(a^x)^y = (a^y)^x$ då $a > 0$

c) $\dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ då $a \neq 0$, $b \neq 0$ d) $e^{\ln x} = x$ då $x > 0$

e) $\ln(x+y) = \ln x + \ln y$ då $x > 0$, $y > 0$ f) $\ln(x-y) = \dfrac{\ln x}{\ln y}$ då $x > 0$, $y > 0$

g) $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$ då $x > 0$, $y > 0$ h) $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$

i) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ j) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

3.27. Vilka av följande tal är lika?

$$\ln 2^3 \quad \ln 2 \cdot \ln 4 \quad \ln 16 - \ln 2 \quad \ln 8 \quad \ln(-\frac{1}{8}) \quad \ln 2 + \ln 4$$

$$(\ln 2)^3 \quad \frac{\ln 16}{\ln 2} \quad -\ln\frac{1}{8} \quad 3\ln 2 \quad \ln 8 + \ln 1 \quad 2\ln 3$$

L 3.28. Lös ekvationen $\dfrac{\ln(4x^2+7)}{\ln(2x+1)} = 2.$

3.29. Bestäm alla reella tal x som satisfierar ekvationen $2\ln(3-x) - \ln(15-x) = \ln 2$.

T 3.30. Många fysikaliska förlopp, t ex radioaktivt sönderfall, brukar beskrivas av ett exponentiellt avtagande av formen $y = Ae^{-kt}$ där A och k är positiva konstanter och t är tiden. I dessa sammanhang talar man ofta om *halveringstiden* d v s den tid det tar för funktionen att avta från begynnelsevärdet till halva detta värde.
Betrakta funktionen $y = 20e^{-3t}$. Vilken halveringstid har denna funktion?

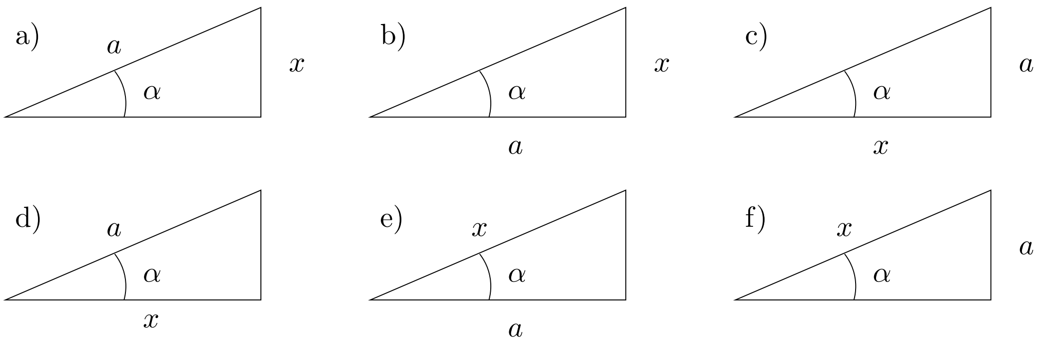
T 3.31. Lös ekvationerna

a) $\ln x + \ln(x+1) = -1$ b) $\ln(3^x + 3^{x+1}) = 0.$

3.32. Förenkla uttrycket $\ln\Big(x(\sqrt{1+e^x} - \sqrt{e^x})\Big) + \ln\Big(\sqrt{1+e^{-x}} + 1\Big).$

3.33. Rita funktionerna $\sin(x - \frac{\pi}{4})$, $\sin(2x - \frac{\pi}{4})$ och $\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$ i samma koordinatsystem.

3.34. Uttryck x som funktion av a och α i figurerna nedan.



T 3.35. Beräkna $\sin(\frac{\pi}{3} + \theta)$ och $\cos(\frac{\pi}{3} + \theta)$ om $\sin\theta = 0.6$ och $\tan\theta$ är negativ.

L 3.36. Funktionen $f(t) = 3\cos t - 5\sin t$ kan skrivas på formen $f(t) = A\sin(t+\delta)$ där $A > 0$ är en konstant. Bestäm A och $\tan\delta$. I vilken kvadrant ligger δ?

T 3.37. En av förutsättningarna i $j\omega$-metoden, för analys av växelströmskretsar, är att summan av två sinusfunktioner med samma vinkelfrekvens, men möjligen olika fasvinkel, är en sinusfunktion. Visa detta, d v s bestäm konstanterna C och γ så att

$$A\sin(\omega t + \alpha) + B\sin(\omega t + \beta) = C\sin(\omega t + \gamma).$$

3.38. Förenkla $\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta.$

3.39. Uttryck $\cos^4\theta - \sin^4\theta$ i cosinus för multipla vinklar.

3.40. Lös ekvationerna

a) $\sin 4x = \sin x$ b) $\cos 5x = \cos x$ c) $\tan 3x = \tan x.$

T 3.41. Lös ekvationen $\cos 5x = \sin x$.

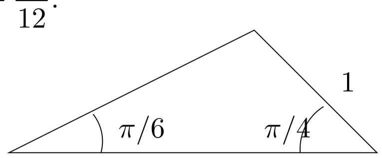
3.42. En bärvåg med vinkelfrekvensen ω_0 amplitudmoduleras med en ren sinuston med vinkelfrekvens $\omega_m \ll \omega_0$. Den modulerade signalen blir av formen

$$u(t) = A\,(1 + \mu \cos(\omega_m t)) \cos(\omega_0 t)$$

där A och μ är konstanter. Skriv denna signal som summan av tre harmoniska svängningar (undre sidband, bärvåg och övre sidband).

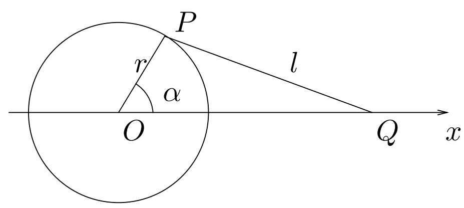
3.43. Beräkna $\sin \dfrac{7\pi}{12}$ genom att utnyttja att $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{3\pi}{12} + \dfrac{4\pi}{12}$.

T 3.44. Beräkna samtliga vinklar och samtliga kantlängder i triangeln.



T

3.45. Modell av kolvrörelse.
En vev med längd r roterar kring punkten O. I vevens ände, punkten P, är en vevstake med längden l fäst. Vevstakens andra ände, Q, glider längs x-axeln. Bestäm Q:s läge då veven bildar vinkeln α med x-axeln.



3.46. Rita i en och samma figur

a) $y = \sin x,\ -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ och $y = \arcsin x$

b) $y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi$ och $y = \arccos x$

c) $y = \tan x,\ -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ och $y = \arctan x$

d) $y = \cot x,\ 0 < x < \pi$ och $y = \operatorname{arccot} x$.

L 3.47. Vad är $\arcsin x$ och $\arccos x$ om x är

a) 1 b) –1 c) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) 2 e) $\dfrac{1}{2}$ f) 0 g) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$?

3.48. Vad är $\arctan x$ och $\operatorname{arccot} x$ om x är

a) 1 b) –1 c) $-\sqrt{3}$ d) 0 e) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$?

3.49. För vilka x gäller att

a) $\arctan(x-2) = \dfrac{\pi}{4}$ b) $\arcsin(2-3x) = \dfrac{\pi}{6}$ c) $\arccos(2x+4) = \dfrac{\pi}{3}$

d) $\arctan(x^2 - 5x + 6) = 0$ e) $\arccos(x^2+1) = \dfrac{\pi}{4}$ f) $\arcsin(3x-1) = \pi$

3.50. Vi vet att $\arcsin x = \dfrac{\pi}{3}$. Vad är $\arccos x$?

3.51. Beräkna

a) $\sin(\arcsin \frac{1}{2})$ b) $\cos(\arccos 2)$ c) $\sin(\arccos \frac{1}{3})$

d) $\sin(\arctan \pi)$ e) $\tan(\arccos \frac{1}{4})$

3.52. För vilka x gäller att

a) $\arccos(\cos x) = x$ b) $\cos(\arccos x) = x$ c) $\arctan(\tan x) = x$?

3.53. För vilka reella a är ekvationen $\arcsin x + \arcsin a = \dfrac{\pi}{2}$ lösbar? Lös ekvationen för dessa värden på a.

L 3.54. Lös ekvationen

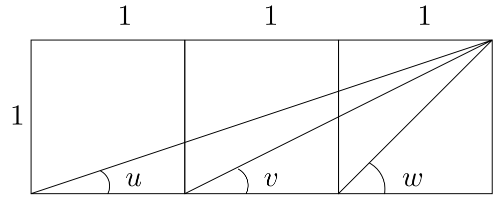
a) $2 \arcsin x + \arcsin 2x = \dfrac{\pi}{2}$ b) $\arccos x = \arctan x$ c) $2 \arcsin x = \arccos 3x$.

T 3.55. Förenkla så långt som möjligt

a) $\arcsin \frac{4}{5} + \arctan 7$ b) $\operatorname{arccot} 2 + \arctan 3 + \arctan 7$

c) $\arctan 2 + \arctan 3 + \arctan 4$

T 3.56. Bestäm $u + v + w$ i figuren.



3.57. De hyperboliska funktionerna definieras som

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ .$$

Visa att

a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (hyperboliska ettan)

b) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

c) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.

T 3.58. Låt $y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Bestäm x uttryckt i y.

3.59. Heavisides språngfunktion definieras som $H(x) = \begin{cases} 0 \ , & \text{om } x < 0 \\ 1 \ , & \text{om } x \geq 0. \end{cases}$

Den är ibland mycket praktisk att använda sig av, t ex om man vill beskriva förlopp som startar vid en viss tidpunkt (strömbrytare) och används följdaktligen ofta vid studiet av elektriska kretsar. Rita grafen till

a) $f(x) = H(x)$ b) $f(x) = H(x - 2)$

c) $f(x) = H(x - 2) - H(x - 3)$ d) $f(x) = (3 - x)\,(H(x - 2) - H(x - 3))$

4 Gränsvärden och kontinuitet

4.1. Skissa graferna till nedanstående funktioner och bestäm $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ c) $f(x) = x$

d) $f(x) = e^{-x}$ e) $f(x) = e^x$ f) $f(x) = \ln x$

4.2. Vad är a) $\lim_{x\to-\infty} e^x$ b) $\lim_{x\to\infty} \arctan x$ c) $\lim_{x\to-\infty} \arctan x$ d) $\lim_{x\to 0_+} \ln x$?

T 4.3. Beräkna

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^3+x^2}$ b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x}{3x^2+1}$ c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x}{3x^3+x}$ d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x-1}$

4.4. Låt $P(x)$ och $Q(x)$ vara polynom, och $Q(x) \neq 0$. Vad kan sägas om $\lim_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ om

a) grad $P(x) >$ grad $Q(x)$
b) grad $P(x) =$ grad $Q(x)$
c) grad $P(x) <$ grad $Q(x)$?

4.5. Beräkna

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x-2}$ b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}$ c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+3\sqrt{x}}{1-x}$

4.6. Beräkna

a) $\lim_{x\to\infty} \cos x$ b) $\lim_{x\to\infty} \sin x$ c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{4-\sin x}{x}$ d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x\sin x}{2-x^2}$

L 4.7. Beräkna

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln 3x}{\ln x^3}$ b) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$

c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{4^n+1}{(2^n+n^2)^2}$ d) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k}$

T 4.8. Bestäm konstanterna A och B så att $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - Ax - B) = 0$.

4.9. Beräkna a) $\lim_{n\to\infty} (1-\dfrac{1}{n})(-1)^n$ b) $\lim_{n\to\infty} (n-\sqrt{n^2-1})$ c) $\lim_{n\to\infty} n(n-\sqrt{n^2-1})$.

4.10. Beräkna $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}}$.

4.11. Beräkna a) $\lim_{x\to\infty} x^2 \ln x$ b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$ c) $\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-\sqrt{x}}$.

4.12. Runt ett bord i Ryd sitter några glassugna teknologer och stirrar på ett glasspaket. De har upptäckt att de inte klarar av att dela glassen så att all får exakt lika mycket glass och vet ingen råd. Lyckligtvis passerar Linnéa det öppna fönstret och upptäcker deras brydsamma situation. Rådig som alltid, föreslår hon följande lösning på problemet:

— Linus får först föra kniven från ena änden till mitten av glasspaketet (hon vet nämligen att Linus är kapabel att finna mitten av en sträcka). Därefter för han kniven tillbaka halva sträckan (d v s tillbaka 1/4 paket) därefter framåt halva denna sträcka, bakåt halva denna sträcka o s v . Då kommer Linus, "efter att ha utförd detta oändligt många gånger", att ha hittat den del på paketet där han skall skära för att få sin bit.

Linus invänder att detta kommer att ta oändligt lång tid, men även här finner Linnéa på råd.

— Du är ju en händig teknolog, Linus, så det går nog bra ska du se. Det tar dig 10 sekunder att hitta mitten av paketet, men när du sedan skall backa tillbaka halva sträckan kommer det att gå fortare, det tar bara 5 sekunder. För varje ny halvering du gör kommer säkert bara halva föregående tiden att gå åt. Du ska ju bara flytta kniven hälften så långt som förra gången.

Därefter lämnar hon de förbryllade teknologerna. En liten stund senare passerar hon åter fönstret och ser då hur hennes vänner sitter och smaskar i sig varsin exakt lika stor bit "Gammaldags Vanilj".

a) Hur många teknologer satt det runt bordet?

b) Hur lång tid tog det för Linus att skära upp sin bit?

T 4.13. Konvergerar talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ då $a_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$?

T 4.14. Konvergerar talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ då $a_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{4^2} + \dfrac{3}{4^3} + \cdots + \dfrac{n}{4^n}$?

4.15. Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n-3} - \frac{n}{2} \right)$.

L 4.16. Beräkna a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n-1)^n}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

4.17. Visa att $\displaystyle\lim_{n\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

4.18. Rita en situationsbild som illustrerar hur talen a_n varierar med n då

a) $\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_{n+1} &= \dfrac{3}{2} + a_n - \dfrac{a_n^2}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_0 &= 2 \\ a_{n+1} &= a_n^2 + a_n - 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_0 &= 3 \\ a_{n+1} &= \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n} \end{cases}$

L 4.19. En talföljd är definierad genom rekursionsformeln $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ och $u_1 = 1$. Visa först att $0 < u_n < 3$ för alla n och sedan att talföljden är växande. Visa slutligen att följden är konvergent och beräkna dess gränsvärde.

4.20. Vid numerisk beräkning av kvadratrötter använder man ibland följande rekursionsformel:

$$\begin{cases} a_1 = a > 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{A}{a_n}\right) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Visa att a_n konvergerar mot $\sqrt{A}$ då $n \to \infty$.

4.21. Vi vill finna ett närmevärde till roten till ekvationen

$$x^3 + x - 1 = 0$$

genom att använda oss av iteration. Vi skriver om ekvationen på formen $x = g(x)$ och itererar $x_{n+1} = g(x_n)$. Vidare vet vi att roten är ungefär 0.7, så vi väljer $x_0 = 0.7$. Vilken eller vilka av följande val av $g(x)$ fungerar?

a) $g(x) = 1 - x^3$ b) $g(x) = \dfrac{1 + x - x^3}{2}$ c) $g(x) = x^3 + 2x - 1$.

4.22. Använd intervallhalvering för att stänga in det positiva nollstället till

$$f(x) = \sin x - \frac{x^2}{2}$$

i ett intervall av längd 0.001 .

T 4.23. Beräkna

a) $\lim_{x \to 2} x^2 + 1$ b) $\lim_{x \to -1} 1 - x^2 - x^3$ c) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{x - 3}$

d) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ e) $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x^3 - 2x^2}{1 - x^2}$ f) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$

g) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x}{x - 2}$ h) $\lim_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$ i) $\lim_{x \to -2} \left(\dfrac{1}{x + 2} + \dfrac{4}{x^2 - 4}\right)$

4.24. Beräkna a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$ b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$, $m, n \in \mathbf{Z}_+$.

4.25. Vilka av följande funktioner är kontinuerliga? Rita graferna.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$

c) $f(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \leq 0 \\ x \ , & x > 0 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \leq 0 \\ 1 \ , & x > 0 \end{cases}$

4.26. Undersök om funktionen f är kontinuerlig, då

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad x \geq 1 \\ x + 1 & , \quad x < 1. \end{cases}$$

4.27. Bestäm talet k så att f blir kontinuerlig, då

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 \ , \ x \geq 2 \\ k - 3x \ , \ x < 2. \end{cases}$$

4.28. Undersök om funktionen f är kontinuerlig, då

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & , \quad x \neq 2 \\ \\ 4 & , \quad x = 2 \end{cases}$$

L 4.29. Sätt $f(x) = \begin{cases} \sin(3x)/x & , \quad x < 0 \\ Ax + B & , \quad 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \sin x & , \quad x > \pi/2 \end{cases}$. Kan man välja A och B så att funktionen blir kontinuerlig? Bestäm i så fall A och B.

4.30. Sätt $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + 2x - 3}$, $x \neq 1$. Kan man definiera f i $x = 1$ så att den utvidgade funktionen blir kontinuerlig?

T 4.31. Funktionerna f och g är kontinuerliga för $0 \leq x \leq 1$ och $f(0) = g(1) = 0$ samt $f(1) = g(0) = 1$. Visa att det finns ett tal ξ, $0 < \xi < 1$, sådant att $f(\xi) = g(\xi)$.

4.32. Visa att ekvationen $e^{\sin x} = 3\cos x$ har minst en lösning i intervallet $0 < x < \pi/2$.

4.33. Visa att varje reellt polynom av udda grad har minst ett reellt nollställe.

4.34. För funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x}$ gäller att $f(1) > 0$ och $f(-1) < 0$. Borde det då inte finnas ett tal x mellan -1 och 1 så att $f(x) = 0$?

4.35. Visa att funktionen $y = x^5 + x$, $x \geq 0$ har en kontinuerlig invers.

4.36. Beräkna

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^x$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3e^x + 2}{e^x + 4}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - 3e^{-x}}{x + 5e^{-x}}$

T 4.37. Beräkna a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{x^2}$

4.38. Beräkna a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\ln x}$

T 4.39. Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/\ln x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(1+x) - \ln x)$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^4}{\ln x}$

4.40. Sätt $y = e^x - 1$ och uttryck $\dfrac{e^x - 1}{x}$ som en funktion av y. Härled därefter standardgränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

L 4.41. Beräkna

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x - x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x}$ c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin 2x}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - 1}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{\sin^2 x}$

T 4.42. Beräkna

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos x}{x - \pi/2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arctan 4x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{\arcsin 2x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin^2 x} - 1}{x \tan x}$

4.43. Bestäm alla asymptoter till

a) $y = \dfrac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2 - 4}$ b) $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2}$

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ d) $y = \dfrac{x^4}{x^2 + 2x - 3}$

e) $y = \arctan \dfrac{x^4}{x + 2}$ f) $y = \sqrt{x^2 + x}\,,\ x > 0$

5 Differentialkalkyl

5.1. Temperaturen $T(t)$ (grader) i en bil är en funktion av tiden t (minuter), mätt från det att man startar bilen och slår på värmen. Vad betyder följande?

a) $T(0) = 5$ b) $T'(0) = 2$ c) $T'(20) = 0$ d) $T(20) = 18$

5.2. Uttryck följande samband i matematiska formler (inför själv lämpliga beteckningar).

a) Plutonium sönderfaller med en hastighet som är proportionell mot den mängd av materialet som återstår.

b) Spänningen över en spole är proportionell mot ändringen av strömmen (genom spolen) per tidsenhet.

c) Strömmen genom en kondensator är proportionell mot ändringen av spänningen (genom kondensatorn) per tidsenhet.

d) En kropps temperatur ändras med en hastighet som är proportionell mot skillnaden mellan kroppens och omgivningens temperatur.

e) Accelerationen hos en kropp är lika med ändringen av kroppens hastighet per tidsenhet.

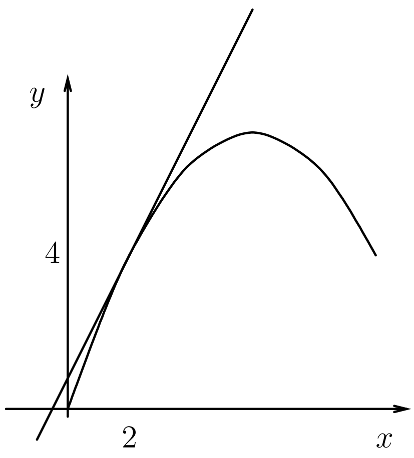
L 5.3. I en behållare finns 100 liter sockerlösning, som från början innehåller 0.15 kg socker per liter vätska. Genom ett rör tillför man 5 l/h av en sockerlösning med koncentrationen 0.1 kg/l. Samtidigt tappar man ur lika stor mängd av lösningen i behållaren genom ett annat rör. Vätskan i behållaren rörs om hastigt, så att koncentrationen är densamma i hela behållaren. Bestäm en ekvation för mängden $y(t)$ av socker i behållaren vid tiden t.

5.4. Rita grafen till $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ för $0 \leq x \leq 4$. Bestäm geometriskt lutningen hos $f(x)$ för $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. Låt $g(x)$ beteckna lutningen som en funktion av x. Rita dess graf samt bestäm dess ekvation.

5.5. Bestäm med derivatans definition $f'(0)$, $f'(1)$ och $f'(x)$ då $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

5.6. Nedanstående figur visar grafen till en funktion $f(x)$. Bestäm ur figuren

a) $f(2)$
b) $f'(2)$
c) ekvationen för den tangent till kurvan som går genom punkten $(2, 4)$.



L 5.7. Beräkna, med direkt användning av definitionen, derivatan till

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = x^3 + x$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e) $f(x) = \sqrt{x}$ f) $f(x) = ax^2 + bx + c$

T 5.8. Ange, på formen $y = kx + m$, tangenten och normalen till kurvan $y = x^3 + 1$ genom den punkt på kurvan där $x = 1$.

5.9. Derivera

a) $x^2 + 2x$ b) $x^3 - \dfrac{1}{x}$ c) x^{-2} d) $2\sqrt{x}$ e) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^5}$

f) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ g) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ h) $(2x-1)^5$ i) $(x+1)^{10}(2-x)^{20}$

j) $(x - x^3)^{11}$ k) $\sqrt{1-x^2}$ l) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ m) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

5.10. Derivera

a) e^{2x} b) $\dfrac{1}{2}e^{-x}$ c) $2\ln x$ d) $\dfrac{\ln x}{4}$ e) $e^{3x} - 3\ln x$ f) $\ln|4x|$

5.11. Derivera

a) $x^2 \ln x$ b) xe^{2x} c) $\ln x \cdot e^{3x}$ d) $2(x^2+2)\ln|x|$

e) $e^{3x}(3x^2 + x)$ f) $\sqrt{x}e^{x/2}$ g) e^{x^2} h) $e^{-2/x}$

i) x^x j) $x^{(x^x)}$ k) $x^{1/\ln x}$

T 5.12. Derivera följande funktioner:

a) $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$ b) $\ln(1+x^2)$ c) $\ln|5-2x|$

d) $(\ln x)^3$ e) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ f) $\ln \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

g) $\ln\left|\ln\left|\dfrac{1}{x}\right|\right|$ h) $x\ln|x|-x$ i) $\ln(e^x-e^{-x})$

5.13. Derivera

a) $A\sin(\omega x+\delta)$ b) $\tan x - x$ c) $e^{-x}\cos x$ d) $e^{\cos x}$

e) $\tan^3 x$ f) $\ln|\tan\dfrac{x}{2}|$ g) $\ln|\sin x|$

5.14. Derivera

a) $\arcsin 4x$ b) $\arccos 3x$ c) $4\arctan\dfrac{x}{2}$

d) $\arcsin(x^2-1)$ e) $\arctan\dfrac{4}{x}$ f) $(\arctan x)^2$

g) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ h) $\arctan e^x$ i) $e^{(1+i)x}$

T 5.15. Beräkna

a) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\arctan(2+h)-\arctan 2}{h}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(1-4x)-\sin 1}{3x}$.

L 5.16. Undersök om funktionen $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & , \quad x\geq 1 \\ x+2 & , \quad x<1 \end{cases}$ är kontinuerlig och deriverbar.

5.17. För vilka x är $f(x)=x^2+1+|x^2-1|$ kontinuerlig respektive deriverbar? Ange funktionens derivata (eller ensidiga derivator). Rita funktionen.

T 5.18. Bestäm konstanterna a och b så att $f(x)=\begin{cases} ae^x+bx+x^2 & , \quad x\leq 0 \\ \sqrt{x+1} & , \quad x>0 \end{cases}$ blir deriverbar för alla x.

5.19. Funktionerna f och g är deriverbara och $f(0)=1,\ g(0)=5,\ f(1)=1,\ g(1)=2,$ $f'(0)=2,\ g'(0)=-1,\ f'(1)=4,\ g'(1)=3$. Motivera varför $g\circ f$ är deriverbar och beräkna derivatan i $x=0$.

T 5.20. Funktionen $f(x)=x^5+x+1,\ x\in\mathbf{R}$ har en deriverbar invers g. Beräkna $g'(35)$.

5.21. Funktionen $f(x)=x^3-6x^2+7$, $0\leq x\leq 4$, är given.

a) Visa att $f(x)$ har en invers funktion, $g(x)$.

b) Ange inversa funktionens definitions- och värdemängd.

c) Beräkna $g'(2)$.

5.22. Den hyperboliska funktionen $\sinh x$ definieras som $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

a) Visa att $f(x) = \sinh x$ har en deriverbar invers funktion.
b) Beräkna den inversa funktionens derivata.

5.23. Låt $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $0 < x < \pi$. Visa att f har en invers funktion $g = f^{-1}$ samt beräkna $g'(2/\pi)$.

5.24. Funktionen $y = f(x)$, $x > 0$, är strängt växande och deriverbar. Vidare är $f(1) = 2$, $f(2) = 10$, $f'(1) = 3$ och $f'(2) = 5$. Är inversen f^{-1} deriverbar i punkten 2? Ange i så fall derivatan.

5.25. Effekten från ett bilbatteri med konstant inre resistans R och konstant polspänning U är $P(I) = UI - RI^2$, där I är strömstyrkan. Vid vilken strömstyrka erhålls maximal effekt? **T**

5.26. Bestäm eventuella lokala extrempunkter till **T L**

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

c) $f(x) = x^4$ d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$

5.27. Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionerna

a) $f(x) = |x-1| - |x-3| + |x-5|$ b) $f(x) = |3x - x^3|$

5.28. Bestäm största och minsta värde för **T**

a) $f(x) = 1 - x^2$ då $x \in [-1, 2]$ b) $f(x) = x^{1/3}$ då $x \in [-1, 1]$

c) $f(x) = x^4 - 4x$ då $x \in [-2, 2]$ d) $f(x) = x + \sin x$ då $x \in [-\pi, \pi]$

5.29. Bestäm största och minsta värde till $f(x) = (x-2)^2\, e^{x^2} + 1$, $x \in \mathbf{R}$.

5.30. Rita grafen till funktionen $f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{2}{x+1}$, $x > 0$ samt ange eventuella lokala max- och minpunkter samt asymptoter.

5.31. Rita följande funktioner. Ange lokala extrempunkter, största och minsta värde samt lodräta och vågräta asymptoter.

a) $f(x) = x^3 e^{-x}$ b) $f(x) = x^4 e^{-x}$

c) $f(x) = x \ln x - 2x$ d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} + 2 \arctan x$.

5.32. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{3 - 2x}$ så att dess väsentliga egenskaper framgår.

5.33. Avgör om funktionen $f(x) = \tan x - x$ är strängt monoton eller monoton på $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

L 5.34. Visa att funktionen $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ är strängt växande i intervallet $]0, \pi/2]$.

5.35. Undersök funktionen $f(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbf{R}$, och visa med hjälp av detta att $e^x > x + 1$ om $x \neq 0$.

L 5.36. Visa att $\arctan x \geq \dfrac{x}{x+1}$ för $x > -1$.

5.37. Hur många reella lösningar har ekvationen $3x^4 + 6x^2 = 8x^3 + 2$? **T**

5.38. Rita funktionen $f(x) = x - 1 - 2\arctan x$ och ange alla lokala extrempunkter och asymptoter. Hur många reella rötter har ekvationen $x - 1 = 2\arctan x$?

5.39. Hur många reella lösningar har ekvationen $\ln \dfrac{4 + 16x^2}{5} = \arctan(2x)$?

5.40. Bestäm största och minsta värde av $\sin^2 x + 2\cos^2 x + 3\sin x \cos x$. **T**

5.41. Rita funktionen $f(x) = x + 3 + |x^2 + x - 2|$, $x \in \mathbf{R}$. Ange lokala extremvärden samt största och minsta värden.

5.42. Rita funktionen $f(x) = x^{3 - \ln x}$, $x > 0$. Ange lokala extrempunkter och asymptoter.

5.43. För vilka värden på x är $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ väldefinierad? Rita funktionens graf samt ange lokala extremvärden och asymptoter.

5.44. Beräkna n:te-derivatan av **T**

a) $f(x) = \ln x$ b) $f(x) = e^{-3x}$ c) $f(x) = x \ln x$

d) $f(x) = \sin x$ e) $f(x) = x^3 e^x$

5.45. Sätt $h(x) = f(g(x))$. Uttryck $\dfrac{d^2h}{dx^2}$ i derivator av f och g.

5.46. Låt f vara en två gånger deriverbar funktion, med $f(a) = f(b) = f(c)$, där $a < b < c$. Visa att det finns minst en punkt ξ, sådan att $a < \xi < c$ och $f''(\xi) = 0$. **T**

5.47. Visa att $\ln(1 + x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ om $x > -1$, $x \neq 0$.

5.48. Gäller olikheten $(1 + x + \dfrac{x^2}{2})e^{-x} \leq e^{x^2/2}$ för alla $x \in \mathbf{R}$?

5.49. Visa att ekvationen $2x - x\ln x = 1$ har exakt en lösning i intervallet $]0, 1[$.

5.50. Visa att funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\sqrt{x} + \arctan x$, $x > 0$ har ett minsta värde och bestäm detta.

5.51. Bestäm, för varje värde på konstanten a, antalet skilda reella rötter till ekvationen

$$6x^5 - 15x^4 - 10x^3 + 30x^2 = a.$$

5.52. Hur många olika reella lösningar har ekvationen $\arctan x = \ln\left(1 + x + x^2\right)$?

5.53. För vilka reella x gäller olikheten $\arctan x < \ln(1 + x + x^2)$

5.54. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = x^x,\ x > 0$. Hur många gånger antas varje värde?

5.55. Visa att $\ln x \leq \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ för $x \geq 1$.

5.56. Visa att $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} < \cos x < 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ för $x \neq 0$. **T**

5.57. Visa att $x \ln x - (\ln x)^2 \geq x - 2$ för $x \geq 1$.

5.58. Bestäm extremvärden samt största och minsta värde till **T**

$$f(x) = x \ln x + (x \ln x)^2 \ ,\ 0 < x \leq \frac{1}{2} \ .$$

5.59. Hur många rötter har ekvationen $2x \ln(1 + x) = 3x - 1$?

5.60. Bestäm alla reella tal a sådana att olikheten $\arctan x \geq x(1 - ax^2)$ är uppfylld för alla $x \geq 0$.

5.61. Hur många nollställen har funktionen $f(x) = \arctan x - \ln(1 + x),\ x > -1$?

5.62. För vilka värden på konstanten a har funktionen $f(x) = \arctan x - ax,\ x \in \mathbf{R}$ något lokalt maximum?

5.63. Vilken punkt på kurvan $y = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ ligger närmast origo?

5.64. I en rätvinklig låda med kvadratisk bottenyta är höjden och sidan i bottenytan tillsammans 6 dm. Bestäm lådans maximala volym.

5.65. Två linjer har riktningskoefficienter k respektive $2k$, $k \geq 0$. Vilka värden kan vinkeln mellan linjerna anta?

5.66. Summan av två positiva heltal är 20. Bestäm deras maximala produkt.

5.67. En låda utan lock, med kvadratisk bottenyta, ska ha begränsningsytan 6 dm^2. Bestäm lådans maximala volym.

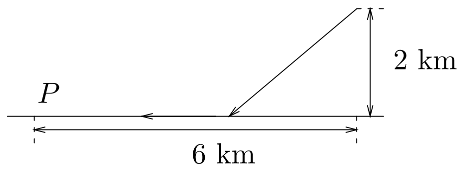
5.68. En likbent triangel har basen 2 cm och toppvinkeln $\pi/3$. I denna inskrivs en rektangel som har ena kanten på triangelns bas. Hur stor kan rektangelns area vara som störst?

5.69. En likbent triangel är inskriven i enhetscirkeln. Bestäm det största värde som triangelns area kan anta.

5.70. Från en ort A går en rak motorväg till en ort B, belägen 40 km från A. En sovstad C växer upp 4 km öster om motorvägen, 24 km norr om A. En trafikundersökning visar att invånarna i C besöker A dubbelt så ofta som B. Hur skall en anslutningsväg från C till motorvägen byggas för att invånarnas totala bensinförbrukning vid färd till A och B skall bli så liten som möjligt?

5.71. Genom en punkt (x, y) på kurvan $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$ dras tangenten och normalen till kurvan. Dessa begränsar tillsammans med x-axeln en triangel med arean $A(x)$. Bestäm största och minsta värde av $A(x)$ (om dessa existerar).

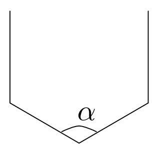
5.72. En man befinner sig i en roddbåt i en sjö, 2 km från stranden. Stranden kan anses vara rätlinjig. Mannen vill så snabbt som möjligt förflytta sig till punkten P genom att först ro till stranden och sedan gå den eventuellt resterande sträckan till P. Mot vilken punkt skall han ro, om han ror 6 km/h och går 10 km/h?



5.73. En konstnär har inbjudits till att utsmycka universitetet. Konstverket är utformat på följande vis. Ett halvklot med radie R läggs på marken med den plana sidan ner och kapas därefter med ett horisontellt snitt. Den övre kalotten tas bort och på den snittyta som uppkommit läggs ett nytt halvklot med samma radie som snittet. Hur högt kan detta konstverk bli som mest?

5.74. Bestäm maximala arean av en axelparallell rektangel som har sina hörn på ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, där a och b är positiva konstanter. Visa också att kvoten mellan denna area och ellipsens area är konstant (dvs oberoende av talen a och b).

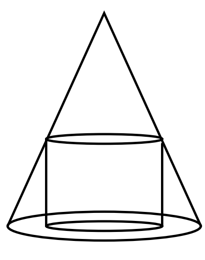
5.75. Man vill tillverka en hängränna av fyra stycken lika breda brädor. Rännan ska ha lodräta sidor, så tvärsnittet ser ut som i figuren. Hur ska vinkeln mellan bottenbrädorna väljas för att rännan skall rymma så mycket som möjligt?



5.76. Punkterna A och B ligger på samma sida om en linje i planet. Bestäm den punkt P som ligger på linjen och som gör att summan av avstånden AP och BP minimeras.

5.77. En rektangel inskrivs i en cirkel med radie 1. Bestäm rektangelns maximala area. Vad har rektangeln för form då arena är maximal?

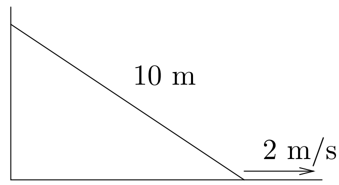
5.78. En cylinder placeras inuti en kon, som bilden till höger visar, så att cylindern och konen har samma symmetriaxel. Hur stor del av konens volym kan cylindern som mest uppta?



5.79. Två gator med bredd a respektive b korsar varandra under rät vinkel. Hur lång är den längsta stång som i horisontellt läge kan föras från den ena gatan till den andra?

5.80. En kon kan bildas på följande sätt. Klipp ut en sektor ur ett cirkulärt papper och klistra ihop de båda raka kanterna. Hur stor skall sektorns medelpunktsvinkel väljas, för att konens volym ska bli så stor som möjligt?

5.81. En 10 m lång stege lutar mot en vägg. Stegens nederdel rör sig från väggen med en hastighet av 2 m/s. Hur snabbt faller stegens överdel, då dess nederdel befinner sig 6 m från väggen? **L**



5.82. En vattentank i form av en rät cirkulär kon (spetsen nedåt) med radie 3 m och höjd 4 m fylls med vatten med en hastighet av 20 l/min. Hur snabbt stiger vattenytan då tanken är fylld till

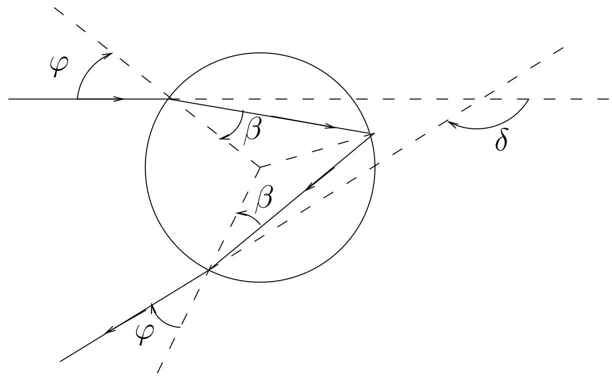
a) 1 dm höjd b) 2 m höjd?

5.83. För en tunn lins gäller linsformeln $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{f}$ där x är föremålets avstånd till linsen, y är bildens avstånd till linsen och f är linsens brännvidd. En lins har brännvidden 10 cm. Ett föremål närmar sig linsen med hastigheten 1 cm/s. Hur fort och i vilken riktning rör sig bilden, då föremålet är

a) 20 cm b) 9 cm från linsen?

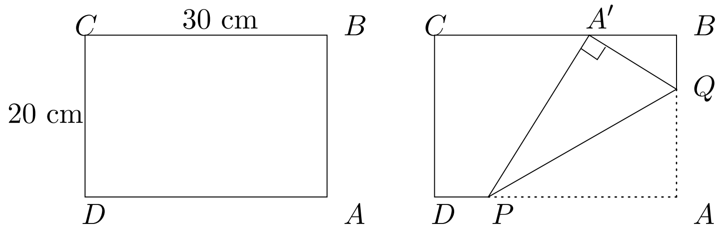
5.84. Ett 2 meter högt plank står på avståndet 3 meter från en vägg. Bestäm den kortaste längd en stege måste ha för att nå från markplanet till väggen, över planket.

5.85. En ljusstråle infaller mot en sfärisk vattendroppe. Strålen bryts, reflekteras och bryts igen innan den fortsätter sin väg (se figuren).

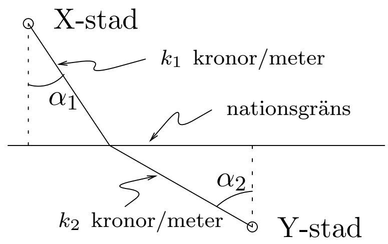


Vid brytningen gäller Snells brytningslag: $n \sin\beta = \sin\varphi$ där n är vattnets brytningsindex ($n \approx 1.3$, men det varierar med ljusets våglängd). Deviationsvinkeln δ anger den riktningsändring som ljuset genomgår. Bestäm infallsvinkeln φ så att δ minimeras (det är i denna riktning som det reflekterade ljuset får högst intensitet, på detta sätt uppkommer regnbågen).

T 5.86. Man viker ett rektangulärt papper som figuren visar, så att hörnet A viks till punkten A' som ligger på sträckan BC och så att P ligger på sträckan AD och Q på sträckan AB. Ange hur man skall vika för att vecket, dvs sträckan PQ, skall bli så kort som möjligt.



5.87. En telefonkabel skall förbinda X-stad i I-land med Y-stad i U-land. Gränsen mellan de två länderna är rätlinjig. På grund av olika löner, skatter m m, räknar telebolaget med en kostnad på k_1 kronor per meter i I-land och k_2 kronor per meter i U-land. Visa att för den billigaste kabelsträckningen gäller att $k_1 \sin\alpha_1 = k_2 \sin\alpha_2$, med beteckningar enligt figuren.



5.88. Ett närmevärde till nollstället α till funktionen f skall beräknas med hjälp Newton-Raphsons metod. Åskådliggör i en figur hur detta går till. Härled iterationsformeln.

5.89. Ekvationen $x^3 - 3x - 1 = 0$ har en rot i $[-0.4, -0.2]$. Bestäm med en noggrannhet om 10^{-4} denna rot med hjälp av Newton-Raphsons metod.

6 Primitiva funktioner

6.1. Beräkna

a) $\displaystyle\int \left(4x^2 + \frac{x}{2}\right) dx$ b) $\displaystyle\int (x^3 - 3x - 1)\, dx$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2}$

d) $\displaystyle\int (\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3})\, dx$ e) $\displaystyle\int x^e\, dx$ f) $\displaystyle\int \frac{dx}{5x}$

g) $\displaystyle\int \frac{x^2 + x}{x}\, dx$ h) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx$ i) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\, dx$

j) $\displaystyle\int \frac{1 + 2\sqrt[4]{x^5}}{x^3}\, dx$ k) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\, dx.$

6.2. Beräkna **T**

a) $\displaystyle\int \cos 2x\, dx$ b) $\displaystyle\int \sin 5x\, dx$ c) $\displaystyle\int \cos\frac{x}{2}\, dx$ d) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{3}\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x}$ f) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-2x}$ g) $\displaystyle\int e^{-2x}\, dx$ h) $\displaystyle\int e^{-x/3}\, dx$

6.3. Av föregående uppgift kan man tycka sig ana ett samband. Det förefaller som om man skall dividera med inre derivatan då man bestämmer primitiva funktioner. Vi undersöker om det kan vara så i allmänhet.

a) Linus påstår att $\displaystyle\int e^{x^2}\, dx = \frac{e^{x^2}}{2x} + C$. Har han rätt?

b) Linnéa är modigare och påstår att $\displaystyle\int f(g(x))\, dx = \frac{F(g(x))}{g'(x)} + C$ om F är en primitiv funktion till f. Vad blir villkoret på $g(x)$ för att hon skall ha rätt?

c) Lägg resultatet i uppgift b) på minnet.

6.4. Beräkna

a) $\displaystyle\int \frac{2}{\cos^2 x}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{7}{1+x^2}\, dx$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-4x^2}}$

6.5. Beräkna **T**

a) $\displaystyle\int xe^{-x}\, dx$ b) $\displaystyle\int x\cos 2x\, dx$ c) $\displaystyle\int x\sin x\, dx$ d) $\displaystyle\int xe^{4x}\, dx$

e) $\displaystyle\int x\ln|x|\, dx$ f) $\displaystyle\int x^2\cos x\, dx$ g) $\displaystyle\int x^2e^{2x}\, dx$ h) $\displaystyle\int \ln 2x\, dx$

6.6. Beräkna **L**

a) $\displaystyle\int \ln|x|\, dx$ b) $\displaystyle\int x\arctan x\, dx$ c) $\displaystyle\int \ln|x^2+x|\, dx$ d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2}.$

6.7. Beräkna **T**

a) $\displaystyle\int \left(x^3+1\right)^7 3x^2\, dx$ b) $\displaystyle\int x(1+2x^2)^4\, dx$ c) $\displaystyle\int 4xe^{x^2}\, dx$ d) $\displaystyle\int e^{\cos x}\sin x\, dx$

6.8. Beräkna

a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x^{n-1}}{1+x^n}\,dx.$

6.9. Beräkna

a) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ c) $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^4+1}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{4x^2}{\sqrt{x^3+2}}\,dx$

6.10. Beräkna a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+4x^2}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$ **T**

6.11. Bestäm alla primitiva funktioner till

a) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ c) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ d) $x^2\ln x.$

e) $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ f) $\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ g) xe^{-x^2} h) $x^3e^{x^2}.$

6.12. Beräkna a) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$ b) $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx.$ **T**

6.13. Beräkna a) $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$ b) $\displaystyle\int x\ln(x^2+1)\,dx$ c) $\displaystyle\int x(\ln x)^2\,dx.$ **L**

6.14. Bestäm alla primitiva funktioner till $\sqrt{x}\cos\sqrt{x}$.

6.15. Följande uttryck skall partialbråksuppdelas. Ange hur en korrekt ansats skall se ut.

a) $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$ b) $\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$ c) $\dfrac{2x+3}{(x+4)^2}$

d) $\dfrac{3}{(x+4)^2}$ e) $\dfrac{x^2-2x+1}{(x+2)^3(x-3)^2}$ f) $\dfrac{2x-4}{(x^2+x+1)(x-4)}$

Vilka av konstanterna kan fås direkt med handpåläggning?

6.16. Partialbråksuppdela följande rationella funktioner.

a) $\dfrac{1}{x^2-1}$ b) $\dfrac{x}{x^2-1}$ c) $\dfrac{2x-1}{x^3+5x^2+8x+4}$ d) $\dfrac{x+2}{x^3-1}$

6.17. Linus har just lärt sig handpåläggning och kommer fram till att

$$\frac{x^2-x-3}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}.$$

Linnéa hävdar dock att svaret inte stämmer. Vem har rätt?

6.18. Beräkna a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+10}{x-2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^2-5x+6}\,dx.$ **T**

6.19. Beräkna a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x+2)^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+8}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-4x}.$

6.20. Beräkna a) $\displaystyle\int \frac{2x^2+11x-31}{x^3-2x^2-5x+6}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{17x^2-x-26}{(x^2-1)(x^2-4)}\,dx.$

6.21. Beräkna a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$ b) $\displaystyle\int \frac{\ln|x|}{(2x+1)^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\ln(x^2+2x+2)}{x^2}\,dx$

T 6.22. Beräkna a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ b) $\displaystyle\int \tan x\,dx$ c) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$ d) $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx.$

6.23. Beräkna a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ c) $\displaystyle\int \sin^2 x\,\cos 2x\,dx.$

6.24. Beräkna a) $\displaystyle\int \frac{\sin 3x}{\sin 2x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{4}{5+4\sin x}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}.$

6.25. Beräkna a) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x-2}}{1-\sqrt{x-2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+3}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}\,dx.$ **T**

6.26. Beräkna

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}\ ,\ a>0$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\ ,\ a>0.$

c) Blir svaren annorlunda om $a<0$?

6.27. Beräkna a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$

6.28. Beräkna $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ genom att **L**

a) göra variabelbytet $x=\sin t$ där $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le \dfrac{\pi}{2}$

b) partialintegrera.

6.29. Bestäm en funktion f definierad för alla $x\ge 0$ sådan att $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^3(x+2)}$ och $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0.$

7 Integraler

7.1. Beräkna $\displaystyle\int_{-1}^{5} \Phi(x)\,dx$ av trappfunktionen $\Phi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -1 \le x < 1 \\ 7 & , \quad x = 1 \\ -2 & , \quad 1 < x < 2.5 \\ -11 & , \quad x = 2.5 \\ 4 & , \quad 2.5 < x \le 5. \end{cases}$ **T**

7.2. Låt $f(x) = x,\ 0 \le x \le 1$.

a) Dela intervallet $[0,1]$ i 5 lika långa delintervall. Låt därefter $\Phi_5(x)$ och $\Psi_5(x)$ vara lämpliga under- resp övertrappor som är konstanta på dessa delintervall. Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \Phi_5(x)\,dx$ och $\displaystyle\int_0^1 \Psi_5(x)\,dx$.

b) Dela istället intervallet $[0,1]$ i 10 delintervall och beräkna på motsvarande sätt $\displaystyle\int_0^1 \Phi_{10}(x)\,dx$ och $\displaystyle\int_0^1 \Psi_{10}(x)\,dx$.

c) Gör om detta då du delar intervallet $[0,1]$ i n stycken intervall.

d) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$.

7.3. Beräkna, med användning av definitionen, $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$. (Jämför föregående uppgift.) **L**

7.4. Visa olikheten $\displaystyle\frac{1}{313} \le \int_3^5 \frac{dx}{1+x^4} \le \frac{1}{41}$.

7.5. Funktionen f är kontinuerlig i en omgivning av 0. Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)\,dt$. **T**

7.6. Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \arctan x\,dx$.

7.7. Bestäm derivatan av funktionen $f(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,dt\ ,\ x \in \mathbf{R}$. **T**

7.8. Bestäm derivatan av funktionen $f(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

L 7.9. Bestäm derivatan av funktionen $f(x) = \int_0^{\arcsin x} \frac{\sin t}{t}\, dt$, $0 < x < 1$.

7.10. Bestäm den punkt i vilken funktionen $f(x) = \int_0^x e^{-t^3} \sin 2t\, dt$, $0 \le x \le \pi$ antar sitt största värde.

7.11. Beskriv likheten $\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x-k)\, dx$ i ord.

7.12. Beräkna följande integraler.

a) $\int_1^2 x^2\, dx$ b) $\int_0^4 \sqrt{t}\, dt$ c) $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x}$

d) $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) dx$ e) $\int_1^3 \frac{x-1}{x^3}\, dx$ f) $\int_0^1 e^{t/4}\, dt$

g) $\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \sin 2x\, dx$ h) $\int_{-1/2}^{0} \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ i) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

7.13. Beräkna följande integraler. L

a) $\int_0^{\pi/2} x\cos x\, dx$ b) $\int_1^2 x^2 \ln x\, dx$ c) $\int_1^e \ln x\, dx$ d) $\int_0^2 \frac{dx}{x+2}$

e) $\int_3^5 4x\sqrt{x^2-9}$ f) $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$ g) $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\, dx$ h) $\int_2^3 x\sqrt{3-x}\, dx$

7.14. Beräkna följande integraler

a) $\int_0^1 \frac{x+3}{x^2+3x+2}\, dx$ b) $\int_0^1 x\ln(1+x^2)\, dx$ c) $\int_0^1 e^x \ln(1+e^{2x})\, dx$

d) $\int_1^e (\ln x)^2\, dx$ e) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\, dx$ f) $\int_0^1 x^3 e^{x^2}\, dx$

7.15. Beräkna följande integraler L

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin 2x\, e^{\cos x}\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi^3} \sin \sqrt[3]{x}\, dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \arcsin x\, dx$

d) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{0} \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\, dx$ e) $\displaystyle\int_1^3 |1-\ln x|\, dx$ f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x+\frac{\pi}{2}| \sin x\, dx$

T 7.16. Beräkna följande integraler

a) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$ b) $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}\, dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin^2 x\, dx.$

7.17. Låt $f(x) = e^{4x} + 2e^{2x} - 5$, $x \in \mathbf{R}$. Beräkna $\displaystyle\int_{-2}^{3} g''(x)\, dx$, där $g(x) = f^{-1}(x)$.

7.18. Beräkna arean av den yta som begränsas av kurvan $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, x-axeln samt linjerna $x = 1$ och $x = 9$

7.19. Beräkna arean av det begränsade området mellan $y = 2x^3 - x^4$ och x-axeln.

7.20. Beräkna arean av det begränsade område som ligger mellan kurvorna $y = x^2$ och $y = x^3$.

7.21. Beräkna arean av det område, i första kvadranten, som begränsas av $y = \dfrac{2}{x}$, $y = 2x$ och $y = \dfrac{x}{8}$

7.22. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan $y = 4x - x^2$, x-axeln samt linjerna $x = -1$ och $x = 4$.

7.23. Beräkna arean innanför ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$ **T**

7.24. Beräkna arean mellan grafen av funktionen $f(x) = \cos(\ln x)$, $1 \le x \le e^{\pi}$ och x-axeln.

7.25. Beräkna volymen av den begränsade kropp som bildas då ytan mellan x-axeln och kurvan $y = 5x,\ 0 \le x \le 4$ roteras ett varv runt x-axeln. **T**

7.26. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området mellan x-axeln och kurvan $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, $0 \le x \le 1$ roteras ett varv kring x-axeln.

7.27. Området som begränsas av kurvan $y = 2 - \sqrt{x}$ samt de positiva koordinataxlarna, roteras ett varv kring x-axeln. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer.

7.28. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer då området mellan kurvan $y = x\sqrt{4-x}$, $0 \le x \le 4$, och x-axeln roterar ett varv kring x-axeln.

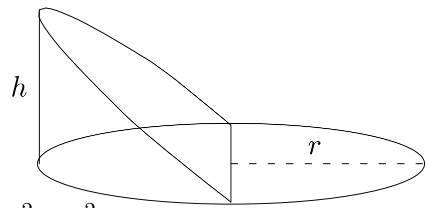
7.29. Området mellan kurvan $y = \cos x + \sin x$, $0 \le x \le \pi/4$, x-axeln och linjerna $x = 0$ och $x = \dfrac{\pi}{4}$ roterar ett varv kring x-axeln. Bestäm volymen av den kropp som uppkommer.

T 7.30. Beräkna volymen av en kon med höjden h och basradien R.

7.31. Ytan mellan x-axeln och kurvan $y = xe^{-x}$, $0 \le x \le 1$ roterar ett varv kring x-axeln. Beräkna den översvepta volymen.

T 7.32. Ett klot med radien R delas i två delar av ett plan med avståndet d från medelpunkten. Beräkna de båda delarnas volymer.

7.33. Om man skär en rak cirkulär cylinder med ett plan genom en diameter i bottenytan, får man en kil som i figuren. Beräkna kilens volym. **T**



7.34. Beräkna volymen innanför rotationsellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2+z^2}{b^2} = 1$ $(a > 0\ ,\ b > 0)$. **T**

7.35. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer då området som begränsas av kurvan $y = x^2$ och linjen $y = 4$ roteras ett varv kring y-axeln.

7.36. Området mellan x-axeln och kurvan $y = \ln x$, $1 \le x \le e$ roteras ett varv kring y-axeln. Hur stor volym får den kropp som uppkommer vid rotationen?

7.37. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området mellan y-axeln och kurvan $y = e^{-x^2}$, $0 \le x \le 1$ roterar ett varv kring y-axeln. **L**

7.38. Kurvan $y = \arcsin\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$, linjen $y = \dfrac{\pi}{6}$ och y-axeln begränsar i första kvadranten ett ändligt område. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då detta område roterar ett varv kring y-axeln.

7.39. Betrakta området mellan kurvan $y = xe^{-x}$, $0 \le x \le 10$ och kurvans horisontella tangent. Bestäm volymen av den kropp som uppkommer då detta område roterar ett varv kring denna tangent.

7.40. Två raka, cirkulära cylindrar med radie R har x- resp y-axeln som symmetriaxel. Bestäm volymen av det område som ligger i båda cylindrarna. **T**

7.41. Hur stor volym har den badring som uppkommer då området $x^2 + (y-3)^2 \le 4$ roterar ett varv kring x-axeln.

7.42. Området $x^2 + y^2 \le 1$, $x + y \ge 1$ roteras ett varv kring linjen $x + y = 1$. Beräkna volymen av rotationskroppen.

7.43. Låt $V(\omega)$ beteckna volymen av den kropp som fås då området mellan kurvan $y = \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$ och x-axeln, för $1 \le x \le \omega$, roteras ett varv kring x-axeln. Bestäm $\lim\limits_{\omega\to\infty} V(\omega)$.

7.44. Bestäm längden av en del av den logaritmiska spiralen: $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$. **T**

Skissera kurvan.

7.45. Beräkna längden av kurvan $y = 2x - 1$, $1 \le x \le 3$.

7.46. Beräkna längden av kurvan $y = \dfrac{2}{3}x^{3/2}$, $0 \le x \le 3$.

L 7.47. Beräkna längden av kurvbågen $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \le x \le 1/2$.

7.48. Beräkna omkretsen av en cirkel med radien R.

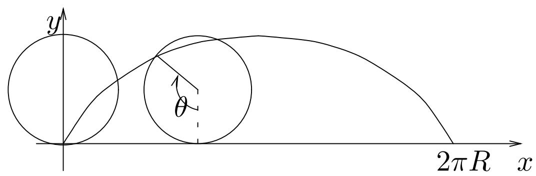
7.49. Beräkna längden av parabeln $y^2 = 4x$ från punkten (1,2) till punkten (4,4).

7.50. Beräkna längden av kurvan $y = \ln\sin x$, $\pi/3 \le x \le \pi/2$.

7.51. Rita och beräkna längden av kurvbågen $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \\ y = \ln t \end{cases}$, $1 \le t \le 2$.

7.52. En kurva ges i polär form av ekvationen $r = e^{-\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Rita kurvan och beräkna dess längd. **T**

7.53. Ett hjul med radien R rullar rakt framåt. Hur långt rör sig en punkt på periferin, då hjulet rullar ett varv? **T**



7.54. Ett hjul med radie r rullar mot insidan av en cylinder med radie $4r$. En punkt på hjulets periferi kommer då att röra sig längs en kurva kallad *hypocykloid.* Kurvan kan parametriseras som

$$\begin{cases} x = 3r\cos\varphi + r\cos(3\varphi) \\ y = 3r\sin\varphi - r\sin(3\varphi) \end{cases}$$

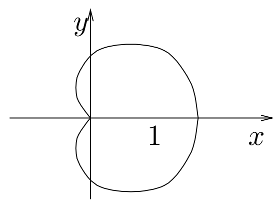
där $0 \le \varphi \le 2\pi$. Bestäm hypocykloidens längd.

7.55. Beräkna arean av en cirkel med radie R. **T**

7.56. Betrakta kurvan som ges av

$$r = 1 + \cos\theta, \ -\pi \le \theta \le \pi \ .$$

a) Beräkna arean av området innanför kurvan.
b) Beräkna kurvans längd.



7.57. Kossan Rosa är bunden med ett snöre vid ett träd. Snöret har längden L och det cylindriska trädet har radien R. I startögonblicket står Rosa med snöret fullt sträckt, rakt radiellt ut från trädet. Rosa börjar vandra runt trädet, hela tiden med sträckt snöre. Hur långt har hon gått då hon kommer in till stammen?
(Såväl snörets tjocklek som Rosas utsträckning försummas.)

T 7.58. Bestäm arean av det område som ligger i de båda cirklarna $r = \cos\theta$ och $r = \sin\theta$.

7.59. Om man låter kurvan $y = x^3,\ 0 \le x \le 1$ rotera ett varv kring x-axeln, bildas en strut med höjden 1. Beräkna volymen och arean av struten.

7.60. Ur ett sfäriskt skal med radie R skärs ett band ut med hjälp av två parallella plan med inbördes avstånd h. Beräkna arean av det band som erhålls.

T 7.61. Beräkna mantelarean av en kon med höjden h och basradien R.

T 7.62. Bestäm tyngdpunktens läge i en homogen halvcirkelskiva med radie R.

7.63. Bestäm tyngdpunktens läge hos ett homogent halvklot med radie R.

7.64. Bestäm tyngdpunkten för den homogena yta som begränsas av kurvan

$$y = \sin x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

och linjerna $x = \frac{\pi}{2},\ y = 0$.

7.65. Kraften mellan två elektriska punktladdningar Q_1 och Q_2 på avståndet r är

$$F = k\,\frac{Q_1\,Q_2}{r^2}\ .$$

En tunn homogen stav med längden L har laddningstätheten q (laddning per längdenhet). Beräkna den kraft med vilken staven attraherar en laddning Q med motsatt tecken, belägen i stavens förlängning på avståndet a från stavens närmaste punkt.

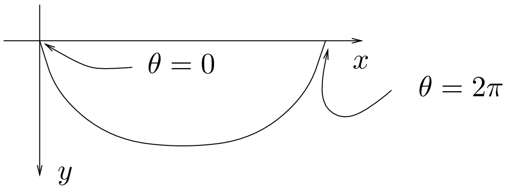
7.66. Vid studiet av elektriska strömmar talar man ofta om strömmens effektivvärde samt det likriktade medelvärdet. Dessa definieras som

$$I_e = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (i(t))^2\,dt} \qquad \text{respektive} \qquad I_l = \frac{1}{T}\int_0^T |i(t)|\,dt$$

där T är periodlängden hos $i(t)$. Beräkna I_e och I_l då $i(t) = \sin 50t$.

7.67. Vanlig trefasspänning består av tre sinusformade faser, fasförskjutna $2\pi/3$, samt en nollnivå. Effektivvärdet för spänningsskillnaden mellan en fas och nollan är 220 V. Beräkna effektivvärdet av spänningsskillnaden mellan två faser.

7.68. En cykloid, se figuren nedan, kan parametriseras som $\begin{cases} x = R(\theta - \sin\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta). \end{cases}$



En kula släpps från en punkt som svarar mot parametern θ_0 ($\theta_0 \in [0, \pi[$) och får glida friktionsfritt ner till kurvans lägsta punkt. Tiden för detta förlopp ges av

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sqrt{1 - \cos\theta}}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}\, d\theta.$$

Bestäm T.

7.69. Beräkna följande generaliserade integraler.

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{2/3}}$ b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{4/3}}$ c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^{2/3}}$ d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^{4/3}}$

e) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-3x}\, dx$ f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{3x}\, dx$ g) $\displaystyle\int_3^{4} \frac{dx}{(x-3)^{1/3}}$ h) $\displaystyle\int_1^{5} \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$

i) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{2x-1}$ j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1-x)^2}$ k) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x}$ l) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x}$

7.70. Beräkna följande generaliserade integraler. **T**

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}\, dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{4 + x^2}\, dx$ d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{4 + x^2}\, dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\infty} x e^{-2x}\, dx$ f) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2}\, dx$ g) $\displaystyle\int_0^{1} \ln x\, dx$ h) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{x}\, dx$

i) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ j) $\displaystyle\int_2^{3} \frac{dx}{x^2 - 4}$ k) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ l) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$

7.71. Vilket fel begås om man får att $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -2$?

7.72. Området som begränsas av kurvan $y = \dfrac{1}{2+x}$, de positiva koordinataxlarna samt linjen $x = t$ $(t > 0)$, får rotera kring x-axeln. Bestäm volymen av den erhållna rotationskroppen. Vad händer då $t \to \infty$?

7.73. Låt kurvan $y = \dfrac{1}{x}$, $x \geq 1$ rotera ett varv runt x-axeln. Då uppstår en oändligt lång strut.

a) Beräkna strutens volym.

b) Beräkna strutens mantelarea.

c) Ofta framställs resultatet ovan som en paradox. Man kan fylla struten med ändlig mängd färg och på detta sätt måla strutens insida, däremot kan man inte måla strutens utsida eftersom den har oändlig area. Är detta en paradox?

7.74. Vid studier i sannolikhetslära dyker ofta integralen $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ upp. Tyvärr kan man inte finna någon elementär primitiv funktion till e^{-t^2} men med flervariabelanalys (!) kan man visa att $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Beräkna m h a detta $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-a^2(x-b)^2}\,dt$.

8 Differentialekvationer

T 8.1. Skissera riktningsfältet för differentialekvationen

a) $y' = x + y$ b) $y' = x - y$

8.2. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationerna

a) $y' = 5$ b) $y' = 5x + 2$ c) $y' = \cos 2x$

d) $xy' = 1$ e) $y' = 3e^x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ f) $y'\sqrt{x} = 1 - 2x$

8.3. Lös differentialekvationen $y' = 2x$ samt rita några av lösningarna i ett och samma koordinatsystem. Bestäm den lösning som går genom punkten $(2, 7)$.

8.4. Lös följande differentialekvationer med givna villkor.

a) $y' = e^{-x/2}$, $y(0) = 3$ b) $y' \cos^2 x = 1$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ c) $x^2 y' = 1$, $y(2) = 4$

8.5. För en given kurva gäller att kurvans lutning i en godtycklig punkt är lika med punktens x-koordinat multiplicerat med 4. Bestäm ekvationen för denna kurva, om man dessutom vet att kurvan går genom punkten (1,5).

8.6. Till vilka av följande differentialekvationer är funktionen $y = Ce^{-4x}$ en lösning?

a) $y' = 4x$ b) $y' + 4y = 0$ c) $y' - 4y = 0$

8.7. Lös följande differentialekvationer.

a) $y' + 2y = 0$ b) $y' = 3y$ c) $4y' + y = 0$ d) $2y' = 5y$

8.8. Bestäm den lösning till differentialekvationen $\dfrac{dy}{dt} = 2y$ som uppfyller $y(0) = 4$

8.9. Bestäm funktionen $f(x)$ så att den uppfyller villkoren $3f'(x) = f(x)$ och $f(0) = 2$, samt bestäm $f(1)$.

8.10. För ett radioaktivt preparat gäller att vid varje tidpunkt är sönderfallshastigheten proportionell mot mängden vid denna tidpunkt. Antag att det från början finns 3.0 mg radon. Bestäm hur stor mängd radon som återstår efter 7 dygn, om halveringstiden är 3.8 dygn.

L 8.11. Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy' + 10y = \ln x$, $x > 0$ som uppfyller villkoret $y(1) = 0$.

8.12. Lös följande differentialekvationer

a) $xy' - y = 0$ b) $y' = 2(1 - y)$ c) $y' - xy = 0$

d) $y' + \dfrac{1}{x}y = x$ e) $y' + y \cot x = \sin x$ f) $xy' + x^2 y = x^2$, $y(0) = 2$

g) $y' + (1 + 2x)y = e^{-x^2}$ h) $(x^2 + 1)y' = y$ i) $xy' + y = \sin x$, $y(\pi) = 0$.

8.13. Bestäm den lösning till differentialekvationen $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2 \arctan x$ som uppfyller $y(0) = 1$.

8.14. Lös differentialekvationerna

a) $(1 + x^4)y' - 4x^3y = x^7$

b) $y' + \dfrac{x}{1 - x^2}\, y = \dfrac{x \ln x}{(1 - x^2)^{3/2}}$, $0 < x < 1$

c) $(x^2 + 2x)y' + (x + 1)y = \sqrt{x^2 + 2x}$, $x > 0$.

8.15. Bestäm samtliga funktioner $y(x)$, definierade för $x > 0$, sådana att

$$y'(x) + \frac{2}{x} y(x) = \frac{\cos x}{x} \quad .$$

8.16. Finn den lösning till differentialekvationen $(1 + x^2)y' + y = 2$ som har gränsvärdet 3 då $x \to \infty$.

8.17. En liten metallkula med massan m släpps från 2 meters höjd och faller rakt ner. Under färden påverkas den enbart av tyngdaccelerationen g.

a) Hur lång tid tar det innan kulan träffar marken?

b) Vilken hastighet har kulan då den träffar marken?

8.18. En partikel med massan m släpps utan begynnelsehastighet vid tiden $t = 0$ från en viss punkt och faller därefter längs lodlinjen, utan att påverkas av andra krafter än tyngdkraften. Vid tiden $t = t_1$ släpps en annan partikel med massan $2m$ från samma punkt. Beräkna avståndet mellan partiklarna, som funktion av tiden.

T 8.19. Vid sönderfall av ett radioaktivt ämne A bildas ett radioaktivt ämne B som i sin tur sönderfaller i ett stabilt ämne C. Sönderfallshastigheten är i båda fallen proportionell mot mängden av det sönderfallande materialet (dock ej nödvändigtvis samma proportionalitetskonstant för båda ämnena).

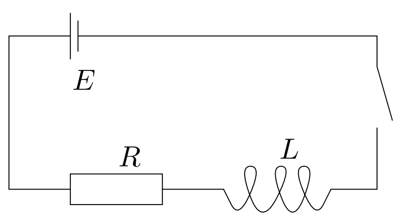
a) Beräkna mängden av ämnena A och B vid en godtycklig tidpunkt.

b) Under vilka förutsättningar ökar mängden av ämne B initialt?

8.20. Kurvan $y = f(x)$ har den egenskapen att varje punkt på kurvan ligger mittemellan de båda punkter där kurvtangenten (i den givna punkten) skär koordinataxlarna. Hur kan $f(x)$ se ut?

8.21. Linus, som väger 80 kg, sätter sig i sin bil och märker att bilen sjunker 5 mm. Han går ur bilen och upptäcker att bilen försätts i gungning upp och ner, med en frekvens av 2 Hz. “Hmm, stötdämparna behöver bytas”, tänker han. Men hur mycket väger bilen?

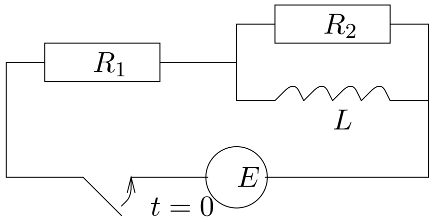
8.22. Strömbrytaren i kretsen till höger sluts vid tiden $t = 0$. Strömstyrkan, $i(t)$, beskrivs av differentialekvationen



$$R\, i(t) + L\frac{di}{dt} = E \ .$$

Beräkna $i(t)$.

T 8.23. Betrakta vidstående krets.
Som bekant (?) är spänningsfallet över spolen $u = L\dfrac{di}{dt}$, där i är strömmen genom spolen. Vid tiden $t = 0$ slås strömbrytaren till.



a) Bestäm strömmen genom spolen, då $R_1 = R_2 = 10\ (\Omega)$, $L = 0.05\ (H)$ samt $E = \sin 100t\ (V)$.

b) Jämför med det resultat du får om du använder $j\omega$-metoden.

T L 8.24. Lös differentialekvationerna och ange lösningens definitionsmängd.

a) $yy' = x$ b) $y' = y^2$ c) $y' = \dfrac{3y-1}{x}$

d) $y' = e^{x+y}$ e) $\dfrac{dx}{dt} = e^x \sin t$ f) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + y^2$

8.25. Bestäm den lösning till $(1+x^2)y\dfrac{dy}{dx} = x^2$, $x \geq 0$ som uppfyller $y(0) = 2$.

8.26. Bestäm funktionen $y(x)$ så att den uppfyller villkoren $(1+x^2)\,y' = e^{-y}$, $y(0) = 0$.
För vilka x är $y(x)$ definierad?

L 8.27. Lös differentialekvationerna

a) $xy' + y^2 = 1,\ x > 0$ då $y(1) = 1/3$ b) $xy' + y^2 = 1,\ x > 0$ då $y(1) = 1$

c) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 2$

8.28. Antag att x_0 bakterier placeras i en näringslösning vid tiden $t = 0$ och låt $x(t)$ vara antalet bakterier vid tiden t. Om mat och levnadsutrymme är obegränsat kommer, som en följd härav, populationen vid varje tidpunkt att öka med en fart proportionell mot antalet bakterier. Bestäm antalet bakterier som en funktion av tiden.

8.29. Då en kropp faller påverkas den dels av tyngdaccelerationen men också av en motriktad acceleration på grund av luftmotståndet. Antag att den totala accelerationen a har utseendet $a = g - cv^2$, där v är farten, g är tyngdaccelerationen och $c = k/m$ där m är kroppens massa och k är en konstant som beror av kroppens form. Om $v = v_0$ vid tiden $t = 0$, bestäm $v(t)$. Vilken blir gränshastigheten?

8.30. En kemisk reaktion av andra ordningen kan beskrivas av en differentialekvation av formen

$$y' = k(a-y)(b-y)$$

där a, b och k är positiva konstanter. Bestäm den lösning som uppfyller $y(0) = 0$ då $a \neq b$.

8.31. I ett inhägnat skogsparti släpper man ut 200 hjortar. Man uppskattar att högst 1000 hjortar kan livnära sig inom detta område. En modell för populationen är att tillväxten är proportionell mot både antalet hjortar och skillnaden mellan maximal population och aktuellt antal hjortar, dvs produkten av dessa båda storheter (är detta en rimlig modell?). Efter tre år finns det 350 hjortar i området. Hur lång tid ytterligare tar det innan det finns 500 hjortar i området?

T 8.32. Bestäm alla kontinuerligt deriverbara funktioner y som uppfyller integralekvationen

a) $y(x) = 1 + \int_0^x y(t)\,dt$ b) $y(x) + \int_x^1 \frac{2t\,y(t)}{1+t^2}\,dt = 2x - 2.$

8.33. Lös integralekvationen $\int_0^x y(t)\,dt + (1+x^2)y(x) = 1.$

8.34. Bestäm alla två gånger kontinuerligt deriverbara lösningar till integralekvationen $y(x) = \cos x + \int_x^\pi \left(\int_0^t y(s)\,ds \right) dt$.

T 8.35. Kurvan C , definierad för $x \geq 0$, går genom punkten (1,0) och har följande egenskap: tangenten i en godtycklig punkt (x, y) på kurvan skär y-axeln i punkten $(0, \alpha(x+y))$ (α är en konstant, $0 \leq \alpha \leq 1$). Bestäm ekvationen för kurvan C och skissera kurvan.

8.36. Visa att funktionerna $y = e^x$, $y = -2e^{5x}$ och $y = e^x - 2e^{5x}$ är lösningar till differentialekvationen $y'' - 6y' + 5y = 0$.

L 8.37. Lös differentialekvationerna

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ b) $y'' + y' - 2y = 0$ c) $y'' + 2y' + y = 0$

d) $y'' - 4y' + 4y = 0$ e) $y'' - 6y' + 10y = 0$ f) $y'' + 6y' + 25y = 0$

g) $y'' + 4y = 0$ h) $y'' + 6y' = 0$ i) $y'' + 3iy' - 2y = 0$

8.38. Lös följande begynnelsevärdesproblem.

a) $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y'' + y' - 6y = 0 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(\pi/2) = 2 \\ y'(\pi/2) = 1 \end{cases}$

T 8.39. Lös differentialekvationerna

a) $y'' - y = x^2$ b) $y'' + 2y' - 3y = 1 - 6x$ c) $y'' - 3y' = x^2$

L 8.40. Lös differentialekvationerna

a) $y'' + 2y' - 8y = e^{5x}$ b) $y'' + 2y' - 8y = e^{2x}$ c) $y'' + 4y' + 5y = xe^{x}$

8.41. Lös differentialekvationerna **T**

a) $y'' + 4y' + 4y = 25\cos x$ b) $y'' - 2y' - 3y = 2\sin x$

8.42. Lös differentialekvationerna

a) $y'' - 3y' + 2y = e^{2ix}$ b) $y'' - 3y' + 2y = \cos 2x + \sin 2x$

c) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}\sin x$ d) $y'' - 6y' + 10y = e^{3x}\sin x$

8.43. Lös differentialekvationerna

a) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^{x} + 4x$ b) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} + \sin x$

c) $y'' + 2y' + y = e^{x} - e^{-x}$ d) $y'' + 4y = 2\sin x - \cos x$

e) $y'' + y = \sin x$

8.44. Lös differentialekvationerna

a) $y''' - 3y' + 2y = 0$ b) $y''' - y = e^{x} + \sin x$ c) $y^{(4)} - 3y'' - 4y = e^{-2x}$.

8.45. Lös differentialekvationen $y''(t) + 4y(t) = 8t^2$ under villkoren $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

8.46. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 4y' + 4y = e^{x}$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 2$ och $y'(0) = 5$.

8.47. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 4y' + 4y = e^{x}$ som uppfyller randvillkoren $y(0) = 2$ och $y(1) = e$.

8.48. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + y' - 6y = e^{3x}$ som har ett gränsvärde då $x \to -\infty$ och som antar värdet 2 då $x = 0$.

8.49. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 2y' = e^{2t}(t^2 + t - 3)$ för vilken gäller att $y(0) = y'(0) = 2$.

8.50. En partikel rör sig längs y-axeln och attraheras mot origo av en kraft som är proportionell mot partikelns avstånd från origo. Partikelns läge y vid tiden t (sekunder) bestäms av differentialekvationen $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -4y$. Vid tiden $t = 0$ befinner sig partikeln i vila i punkten $y = 10$. Bestäm y som funktion av t samt ange vid vilken tidpunkt partikeln för första gången passerar origo.

8.51. Rörelsen för en massa m , som påverkas av en fjäderkraft, kan beskrivas med hjälp av differentialekvationen $m\dfrac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$ där y är avvikelsen från jämviktsläget och $k > 0$ är fjäderkonstanten. Lös differentialekvationen med begynnelsevillkoren $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$.

8.52. Om svängningsrörelsen är dämpad, får differentialekvationen utseendet

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = 0 \ (c > 0,\ k > 0).$$

Lös den med begynnelsevillkoret $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$ då

a) $m = 1,\ c = 10,\ k = 9$ b) $m = 1,\ c = 6,\ k = 25$ c) $m = 1,\ c = 2,\ k = 1$

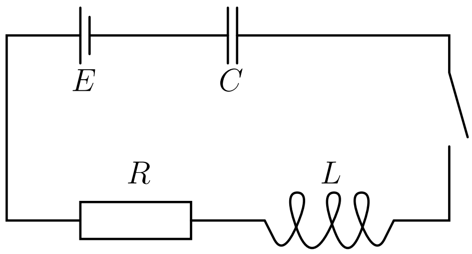
8.53. Om den svängande massan utsätts för en yttre kraft får ekvationen utseendet

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = F(t).$$

a) Lös differentialekvationen under begynnelsevillkoren $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$ då $m = 1,\ c = 0,\ k = 25$ och $F(t) = \sin 5t$.

b) Vad händer då $t \to \infty$?

8.54. Strömbrytaren i kretsen till höger sluts vid tiden $t = 0$. Spänningsfallet över motstånd, spole och kondensator är som bekant (?) $u_R(t) = Ri(t)$, $u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ respektive $u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(s)\,ds$ (om kondensatorn ej är uppladdad då strömbrytaren sluts).



Beräkna $i(t)$ om $E =$ konstant. Särskilj fallen $4LC < R^2C^2$, $4LC = R^2C^2$ och $4LC > R^2C^2$. Vad händer då $t \to \infty$? Hur ser det ut om $R = 0$?

8.55. Visa att $v(x) = x^{-1/2}\sin x$ är en lösning till Besselekvationen

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0.$$

Lös ekvationen allmänt genom att sätta $y(x) = u(x)v(x)$ $(x > 0)$.

8.56. Betrakta en öppen behållare med vatten. Om ett litet hål tas upp i botten på behållaren kommer, enligt Toricellis princip, vattnet att strömma ut genom hålet med den hastighet det skulle uppnå om det fick falla fritt från vattenytan till hålet. Låt nu denna öppna behållare invändigt ha formen av en halvsfär, med radie R , med den plana delen uppåt (d v s som en skål ungefär). Antag att den är helt fylld med vatten och att man vid tiden $t = 0$ tar upp ett litet hål med radie r i botten. Hur lång tid tar det innan skålen är tom?

T 8.57. En vertikal cylinder med radie R och höjden H är fylld med en smält metall. När metallen stelnar minskar dess volym med faktorn k , där $0 < k < 1$. Bestäm den stelnade metallytans form om metallen kyls radiellt utifrån och inåt.

8.58. Bernoullis ekvation

$$y' + g(x)y = h(x)y^{\alpha}$$

kan överföras till en linjär ekvation genom att man inför den nya funktionen

$$z(x) = \frac{1}{y(x)^{\alpha-1}}.$$

Bestäm denna ekvation och lös därefter differentialekvationen $y' - xy = x^3y^2$.

8.59. Lös Eulerekvationen

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^2, \; x > 0$$

genom att införa $t = \ln x$ som ny variabel.

9 Taylors och Maclaurins formel

9.1. Rita graferna till funktionerna

$$y = e^x \ , \ y_0 = 1 \ , \ y_1 = 1 + x \ \text{ och } \ y_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2} \ , \ -1 \le x \le 2$$

i samma koordinatsystem. Slutsats?

9.2. Beräkna taylorpolynomet av grad 3 till funktionen

$$f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 7x + 1$$

kring punkten a) 0 b) 1.

9.3. Beräkna taylorpolynomet av grad 3 till funktionen e^x kring punkten 0.

9.4. Beräkna taylorpolynomet av grad 3 till funktionen e^x kring punkten -1.

9.5. Beräkna taylorpolynomet av grad 4 till funktionen $\cos x$ kring punkten π.

9.6. Använd maclaurinutvecklingen av e^x för att visa att **L**

$$e^x \ge 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

för alla x.

9.7. Bestäm maclaurinpolynomet av grad 2 till funktionerna

a) $f(x) = e^x$ b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ c) $f(x) = \sqrt{1+x}$ d) $f(x) = e^x \sin x$

9.8. Bestäm maclaurinpolynomet av grad 5 till $\sin 3x$

a) genom att derivera funktionen ett antal gånger

b) genom att använda utvecklingen för $\sin x$.

9.9. Beräkna maclaurinpolynomet av grad 4 genom att använda kända utvecklingar. **L**

a) $e^x(1+x)$ b) $x \sin x$ c) $e^{x^2} \sin x$ d) $\dfrac{1}{1+x^2}$

9.10. Beräkna maclaurinpolynomet av grad 4 genom att använda kända utvecklingar.

a) $\ln(1+2x^2)$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$ c) $e^{\sin x}$ d) $e^{\cos x}$

9.11. Bestäm maclaurinpolynomet av ordning 4 till $f(x) = \dfrac{\sin 2x^2}{1+x}$.

9.12. Beräkna gränsvärdet **T L**

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{2x^3}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - x}{\sin x - x}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x \sin^3 x}$ d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{e^x - 1 - x}$.

9.13. a) Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 4 till funktionen $f(x) = \cosh x$, där $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

b) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}$.

T 9.14. Polynomet P är av grad fyra och $P(2) = P'(2) = P''(2) = P'''(2) = 0,\ P^{(4)}(2) = 1.$ Bestäm P.

9.15. Beräkna gränsvärdet **T**

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+x}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x^2 - (\ln x)^2}{x - \sqrt{x}}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$.

9.16. Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2+x)}{\ln(1+x)} - \frac{\ln(4+x)}{\ln(1+2x)}$.

9.17. Låt $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0. \end{cases}$ **T**

Visa att f är deriverbar i punkten $x = 0$ och beräkna $f'(0)$.

9.18. Bestäm alla värden på den reella konstanten a för vilka gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax) - 2x + \arctan(ax)}{x^2}$$

existerar, samt ange i dessa fall gränsvärdet.

9.19. Kan den positiva konstanten a väljas så att gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+a)}{(1+x)^{1/x} - e}$$

existerar? Ange i så fall a och motsvarande gränsvärde.

9.20. Bestäm de reella konstanterna a, b och c så att

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+bx+cx^2)e^{-x} - 1 - ax}{x^3} = 0.$$

9.21. Bestäm konstanterna a, b och c så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sin ax + e^{bx} - a\cos x}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ c & , \quad x = 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig.

9.22. Låt x_n vara lösningen till ekvationen $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+x} = e.$

a) Bestäm x_n , d v s lös ekvationen ovan.

b) Beräkna $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

9.23. Beräkna, för varje reellt tal x , gränsvärdet $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\dfrac{x}{n}\right)^{n^2}$.

9.24. Bestäm konstanten A så att gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(3x+2)+\ln(3x-2)-2\ln x + A}{\arctan(1-\cos\frac{1}{x})}$$

existerar. Bestäm också gränsvärdet.

9.25. Bestäm konstanterna a, b och c så att $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}+a+bx+cx^2}{\arcsin x - \sin x}$ existerar. Bestäm även gränsvärdet för dessa a, b och c.

9.26. Låt $f(x) = x^2 \sin\left(2x^2\right)$. Bestäm $f^{(60)}(0)$. **T**

10 Serier

10.1. Beräkna summorna: **T**

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{k+1}\right)$ d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a \cdot x^k$

10.2. Vilka av följande serier är konvergenta? Beräkna i förekommande fall summan. **T**

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2^k} - (-1)^k \cdot \frac{8}{3^k}\right)$ e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3 \cdot 2^k - 10^{-k}$ f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$

10.3. Vilka av följande serier är konvergenta?

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 + k + 2}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos\frac{1}{k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{1}{k^2}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$ e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!}$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 1}{3^k + 2}$

10.4. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta. **T L**

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2 + 1}$ b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2 - 1}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k + 2}{(2k-1)^{5/2}}$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

10.5. Är följande serier konvergenta eller divergenta?

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \tan\frac{1}{\sqrt{k}}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{e} - 1$ c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k} - 1\right)^2$

d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^8}$ f) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$

10.6. För vilka värden på konstanten α konvergerar serierna?

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}}$ b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k\, (\ln(\ln k))^{\alpha}}$

10.7. Visa att $\displaystyle\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n$.

10.8. Visa att $\displaystyle\frac{\pi}{4} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} \le \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

10.9. Avgör för följande serier om de är absolutkonvergenta, betingat konvergenta eller divergenta. **L**

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \sqrt{k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(k\pi + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k^2}$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{\ln k}{k}$

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \left(\sqrt{k^2+k} - k\right)$

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k}$ j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)$

10.10. För vilka reella tal x är serierna konvergenta? **L**

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + (-1)^k}{4^k} \cdot x^k$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot 2^k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2 - k + 7}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k} \cdot x^k$ e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\ln k)^2} \cdot x^k$

10.11. För vilka x konvergerar $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{k!} = 1 + x + \frac{x^4}{2} + \frac{x^9}{6} + \frac{x^{16}}{24} + \dots$?

10.12. a) Beräkna $\displaystyle f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \,, \ |x| < 1 \,.$

b) Bestäm genom termvis derivation $f'(x)$.

c) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x^k$.

d) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k}$.

10.13. En funktion f är definierad genom potensserien

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} \,.$$

Uttryck f utan potensserier (med elementära funktioner).

10.14. Beräkna summan av serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{k!}$.

10.15. Beräkna summan av potensserien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot x^{2k}}{2k(2k-1)}$.

10.16. a) Bestäm konstanterna a_0 , a_1 , a_2 , ... så att $y(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ är en lösning till differentialekvationen $y' - y = x$, $y(0) = 1$.

b) Uttryck $y(x)$ m h a elementära funktioner.

11 Tips och lösningar

1.2. a) Kvadratkomplettera.

1.5. a) Vi möblerar om så att vi får 0 i högerledet, dvs olikheten $(x-1)^2-4>0$. Titta på funktionen $f(x)=(x-1)^2-4$. Utveckla och faktorisera denna så fås $f(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$. Denna har sina nollställen där $x=-1$ eller $x=3$. Vi ritar en teckentabell

x		-1		3	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)=(x+1)(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Av detta ser vi att $f(x)>0$ om och endast om $x<-1$ eller $x>3$, vilket är svaret på frågan.

b) Sätt upp en teckentabell som innehåller alla faktorer i vänsterledet (såväl täljare som nämnare).

c) Faktorisera vänsterledets täljare och nämnare.

1.6. Förläng vänsterledet med konjugatet $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ i täljare och nämnare.

1.10. a) Lös de båda olikheterna $-8<2x+5<8$.

b) Studera de tre fallen *i)* $x<0$ *ii)* $0\le x<1$ resp *iii)* $x\ge 1$.

c) Titta på de båda olikheterna $-1<\dfrac{2x^2+6x-15}{2x-9}<1$ var för sig. Flytta över allt till en sida och gör liknämningt . Faktorisera täljaren och sätt upp teckentabell.

1.11. Triangelolikheten ger $|y|=|x^7-2x^3+5x^2-1|\le|x^7|+2|x^3|+5|x^2|+1\le 9$ dvs $-9\le y\le 9$ v s b.

1.17.
$$\begin{aligned}|xy-6| &= |(x-2)(y-3)+3x+2y-12| = \\ &= |(x-2)(y-3)+3(x-2)+2(y-3)| \le \\ &\le |x-2|\,|y-3|+3|x-2|+2|y-3| \le \\ &\le 0.01\cdot 0.02+3\cdot 0.01+2\cdot 0.02=0.0702<0.08.\end{aligned}$$

1.26. b) Antag att Linus betalar x kronor varje år.
Efter ett år har han en skuld på $10\,000\cdot 1.1-x$ kr (efter betalning).
Efter två år är skulden $(10\,000\cdot 1.1-x)\cdot 1.1-x=10\,000\cdot 1.1^2-x(1+1.1)$ kr.
Efter tio år är skulden $10\,000\cdot 1.1^{10}-x(1+1.1+\cdots+1.1^9)=10\,000\cdot 1.1^{10}-x\dfrac{1.1^{10}-1}{1.1-1}$. Detta skall vara 0, vilket ger $x=1\,000\dfrac{1.1^{10}}{1.1^{10}-1}\approx 1\,627$ kr.

c) Den ränta Linus betalat i första alternativet blir $0.1\cdot(10\,000+9\,000+\cdots+1\,000)=5\,500$ kr. I det andra alternativet blir räntan $10\cdot 1\,000\dfrac{1.1^{10}}{1.1^{10}-1}-10\,000\approx 6\,275$ kr.

1.28. $0 \leq (x-y)^2 = x^2+y^2-2xy$ så $x^2+y^2 \geq 2xy$. Division med xy (riskfritt eftersom x och y är positiva) ger den sökta olikheten.

1.29. *Alternativ 1*: Använd olikheten för aritmetiskt och geometriskt medelvärde:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

När inträffar likhet?

Alternativ 2: Kalla talen a och b. Man vill maximera ab då $a+b=6$ och $a>0$, $b>0$. Lös ut b ur $a+b=6$ så fås att man vill maximera $a(6-a)$ då $0<a<6$.

1.32. *Alternativ 1*: Vi använder induktion:

a. Påståendet är sant för $n=1$, ty då blir $VL = \sum_{k=1}^{1} 2k = 2\cdot 1 = 2$ och $HL = 1\cdot(1+1) = 2$.

b. Antag att påståendet är sant för $n=p$, dvs att $\sum_{k=1}^{p} 2k = p(p+1)$. Då gäller även att $VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} 2k = \sum_{k=1}^{p} 2k + 2(p+1) =$ /enl antagandet/ $= p(p+1)+2(p+1) = (p+1)(p+2) = (p+1)((p+1)+1) = HL_{p+1}$, dvs då gäller påståendet även för $n=p+1$.

Detta visar att påståendet är sant för **alla** heltal $n \geq 1$ vsb.

Alternativ 2: Skriv upp summan två gånger, den andra gången i omvänd ordning (se prophäftet) och summera dessa båda uttryck.

1.34. i) För $n=1$ är $VL = \sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1\cdot 2 = 2$ och $HL = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{3} = 2$, d v s $VL = HL$ för $n=1$.

ii) Antag att $VL = HL$ för $n=p$, d v s att $\sum_{k=1}^{p} k(k+1) = \dfrac{p(p+1)(p+2)}{3}$. Då är

$$\begin{aligned} VL_{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{p} k(k+1) + (p+1)(p+2) = \text{/enl antagandet/} \\ &= \frac{p(p+1)(p+2)}{3} + (p+1)(p+2) = \frac{p(p+1)(p+2)}{3} + \\ &+ \frac{3(p+1)(p+2)}{3} = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3} = HL_{p+1}. \end{aligned}$$

Enligt induktionsprincipen är alltså $VL = HL$ för alla heltal $n \geq 1$ v s b.

1.36. Börja med att skriva om högerledet på en enklare form.

1.42. e) $\binom{1000}{998} = \binom{1000}{2} = \dfrac{1000 \cdot 999}{1 \cdot 2} = 499500$

2.10. a) Utnyttja att $\left|(3-4i)^{12}\right| = |3-4i|^{12}$

b) $\left|\dfrac{(3+i)(5-i)}{(4+3i)(-3+2i)}\right| = \dfrac{|3+i|\,|5-i|}{|4+3i|\,|-3+2i|}.$

2.11. Sätt in $z = a + bi$, där a och b är reella. Identifiera realdel och imaginärdel.

2.14. b) Utnyttja resultatet i a). Sätt $z - 1 = w$, så fås $|z-1|^2 = |w|^2 = w\overline{w} =$
$= (z-1)\overline{(z-1)} = (z-1)(\overline{z}-1)$ o s v.

2.17. Med $z = a + ib$ fås

$$z + \frac{1}{z} = a + ib + \frac{1}{a+ib} = a + ib + \frac{a-ib}{a^2+b^2} = a\left(1 + \frac{1}{a^2+b^2}\right) + ib\left(1 - \frac{1}{a^2+b^2}\right)$$

och detta blir reellt endast om $b = 0$ eller $a^2 + b^2 = 1$ d v s endast om z är reellt eller om z ligger på enhetscirkeln, v s b.

2.21. Utnyttja att $\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w$ och $\arg \dfrac{z}{w} = \arg z - \arg w$.

2.23. Skriv talen inom parentes på polär form och utnyttja de Moivres formel.

2.26. $\cos 5\theta + i \sin 5\theta = e^{5i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^5 = (\cos\theta + i\sin\theta)^5$. Binomialutveckla och identifiera realdelarna i höger- resp vänsterled.

2.29. Vi använder Eulers formler och får

$$\cos^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 2e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}}{2} + 4\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} + 3\right) = \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3).$$

2.34. Skriv om talen på polär form. En vridning $\pi/2$ moturs får man genom att multiplicera med $e^{i\pi/2}$.

2.38. Sätt $z = a + bi$ där a och b är reella. Identifiera realdel, imaginärdel och belopp.

2.39. Börja med att kvadratkomplettera.

2.40. a) Kvadratkomplettera, så fås $(z+1/2-i)^2 = 1/4$. Därefter följer
Alt 1: Sätt $z+1/2-i = a+ib$ och identifiera realdel, imaginärdel och absolutbelopp i höger- och vänsterled, så fås ekvationssystemet

$$\begin{array}{lrcl} (\mathrm{Re}) & a^2-b^2 & = & 1/4 \\ (\mathrm{Im}) & 2ab & = & 0 \\ (\mathrm{Abs}) & a^2+b^2 & = & 1/4. \end{array}$$

Den första och sista ekvationen ger tillsammans att $a = \pm 1/2$ och detta insatt i den andra ekvationen ger $b = 0$. Ur detta fås slutligen att $z = i$ eller $z = -1+i$.
Alt 2: Vi får direkt att $z+1/2-i = \pm 1/2$ och ur detta kan vi lösa ut z.

2.41. Polär form är inte så dumt.

c) $z^4 = -16 = 16e^{i\pi}$. Låt $z = re^{i\varphi}$. Då fås, med de Moivres formel, att $r^4 e^{i4\varphi} = 16e^{i\pi}$. Vi identifierar absolutbelopp och argument, och får

$$\begin{array}{lrcl} (\mathrm{Abs}) & r^4 & = & 16 \\ (\mathrm{Arg}) & 4\varphi & = & \pi+2n\pi \end{array}$$

vilket ger $r = 2$ (ty $r \geq 0$) och $\varphi = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{n\pi}{2}$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. För dessa n fås i tur och ordning
$z_1 = 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(1+i)$
$z_2 = 2e^{3i\pi/4} = \sqrt{2}(-1+i)$
$z_3 = 2e^{5i\pi/4} = \sqrt{2}(-1-i)$
$z_4 = 2e^{7i\pi/4} = \sqrt{2}(1-i)$.

2.43. Skriv z på polär form.

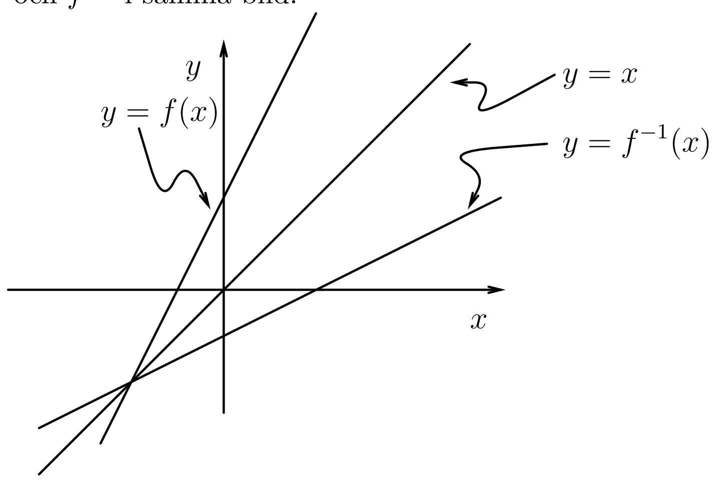
2.44. Sätt $z^2 = w$.

2.52. Reella nollställen saknas, så det måste bli andragardsfaktorer.
Alternativ 1: Börja med att ta fram alla komplexa nollställen.
Alternativ 2: Gör en variant av kvadratkomplettering, $x^4+4 = (x^2+2)^2 - 4x^2$. Här kan man komma att tänka på konjugatregeln.

2.54. $z_1^2 + z_2^2 = (z_1+z_2)^2 - 2z_1z_2$. Vad är z_1+z_2 resp z_1z_2 ? (samband mellan rötter och koefficienter)

3.12. f har invers om olika x-värden ger olika funktionsvärden, d v s så fort $x_1 \neq x_2$ så ska $f(x_1) \neq f(x_2)$. Är det så i dessa figurer?

3.13. a) Sätt $y = f(x)$, d v s $y = 2x + 3$. Inversen finner vi genom att uttrycka x i y. I detta fall fås $x = \dfrac{y-3}{2}$, d v s $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{2}$. Det är mycket vanligt att man vill ha x som variabel även hos inversen, så då döper vi om y till x, och får $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$. Denna omdöpning av variabelnamn görs bl a för att man ska kunna rita f och f^{-1} i samma bild.



Observera att f^{-1} fås genom att spegla f i linjen $y = x$.

c) $y = e^{2x}$ ger $\ln y = 2x$, d v s $x = \dfrac{1}{2}\ln y$, d v s $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{2}\ln y$, $y > 0$. Med samma omdöpning som i a) får vi $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln x$, $x > 0$.

f) $y = x^2$ ger $x = \pm\sqrt{y}$ så om $y > 0$ så fås flera olika x-värden. Funktionen är alltså inte injektiv, d v s invers saknas. (Kom ihåg att f injektiv betyder att om $x_1 \neq x_2$ så är $f(x_1) \neq f(x_2)$. I denna uppgift är t ex $f(-1) = f(1)$ trots att $-1 \neq 1$, alltså är f ej injektiv.)

h) $y = \sqrt{x-1}$ ger $y^2 = x - 1$, d v s $x = y^2 + 1$, så $f^{-1}(y) = y^2 + 1$. Här kan man tro att definitionsmängden är alla y, men kom ihåg att $D_{f^{-1}} = V_f$ d v s f^{-1} är definierad endast för de y-värden som kan antas då $y = \sqrt{x-1}$, d v s $y \geq 0$. Alltså är $f^{-1}(y) = y^2 + 1$, $y \geq 0$ eller med det vanliga variabelnamnbytet $f^{-1}(x) = x^2 + 1$, $x \geq 0$.

3.17. Studera de tre intervallen i) $x < -3$, ii) $-3 \leq x < 2$ resp iii) $x \geq 2$ var för sig, så att du kan beskriva funktionen utan att använda absolutbelopp.

3.19. Vi börjar med att se när $x^2 - 2x - 3 = 0$. Den ekvationen har lösningarna $x = 3$ resp $x = -1$, så $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$.Vi ritar en teckentabell.

x		-1		3	
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-3)(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

För $x < -1$ eller $x \geq 3$ är $f(x) = x^2 + 2x + x^2 - 2x - 3 = 2x^2 - 3$.
För $-1 \leq x < 3$ är $f(x) = x^2 + 2x - (x^2 - 2x - 3) = 4x + 3$.
Från detta är det sedan lätt att rita upp grafen, se facit.

3.21. För att bestämma f^{-1}, sätt $y = 2x + 1$ och lös ut x som funktion av y.

3.22. f är jämn om $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in D_f$. f är udda om $f(-x) = -f(x)$ för alla $x \in D_f$.

a) $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$, d v s f är jämn.

c) $f(-x) = (-x)^2 - 3(-x) + 1 = x^2 + 3x + 1$ d v s $f(-x) \neq f(x)$ och $f(-x) \neq -f(x)$ så f är varken jämn eller udda.

3.28. Funktionen i vänsterledet är definierad för alla $x > -\dfrac{1}{2}$, $x \neq 0$. För dessa x kan vi skriva om ekvationen som

$$\ln(4x^2 + 7) = 2\ln(2x + 1) = \ln(2x + 1)^2$$

och eftersom logaritmfunktionen är injektiv, så måste alltså

$$4x^2 + 7 = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

dvs $x = \dfrac{3}{2}$. Detta x uppfyller villkoren $x > -\dfrac{1}{2}$, $x \neq 0$, alltså är $x = \dfrac{3}{2}$ enda lösningen till ekvationen.

3.30. $y(0) = 20$. Vi söker den tid t som gör att $20e^{-3t} = 10$.

3.31. För vilka x är uttrycken definierade?
a) Använd logaritmlagar.
b) Sätt $3^x = t$

3.35. Ur trigonometriska ettan fås att $\cos\theta = \pm 0.8$. Eftersom $\tan\theta < 0$ och $\sin\theta > 0$ följer att $\cos\theta = -0.8$. Använd därefter additionslagarna.

3.36. Vi använder hjälpvinkelmetoden.

$$f(t) = 3\cos t - 5\sin t = \sqrt{34}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\cos t - \frac{5}{\sqrt{34}}\sin t\right)$$

(där alltså $\sqrt{34} = \sqrt{3^2 + 5^2}$). Eftersom $\left(\dfrac{3}{\sqrt{34}}\right)^2 + \left(\dfrac{-5}{\sqrt{34}}\right)^2 = 1$ så finns en vinkel δ sådan att $\sin\delta = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$ och $\cos\delta = -\dfrac{5}{\sqrt{34}}$, så $\tan\delta = -\dfrac{3}{5}$ och δ ligger i 2:a kvadranten. Av detta får vi att

$$f(t) = \sqrt{34}(\sin\delta\cos t + \cos\delta\sin t) = \sqrt{34}\sin(t + \delta)$$

där alltså $\tan\delta = -\dfrac{3}{5}$ och δ ligger i 2:a kvadranten.

3.37. Utveckla med additionslagarna och använd sedan hjälpvinkelmetoden.

3.41. $\sin x = \cos(\dfrac{\pi}{2} - x)$.

3.44. Sinussatsen och föregående uppgift hjälper.

3.45. Vad säger cosinussatsen?

3.47. a) Att bestämma $\arcsin 1$ är samma sak som att finna en vinkel $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sådan att $\sin v = 1$. Denna ekvation har lösningarna $v = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ och den enda av dessa vinklar som ligger i rätt intervall är $\frac{\pi}{2}$. Alltså är $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. För att bestämma $\arccos 1$ gör man på motsvarande sätt, med den enda skillnaden att vinkeln $v \in [0, \pi]$.

3.54. a) Vi börjar med att skriva om ekvationen på formen

$$2 \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arcsin 2x.$$

Vi kan direkt notera att ett krav för att båda leden ska vara definierade är att $|x| \leq \frac{1}{2}$. Därefter tar vi cosinus för båda leden och erhåller ekvationen

$$\cos(2 \arcsin x) = \cos(\frac{\pi}{2} - \arcsin 2x)$$

d v s

$$1 - 2\sin^2(\arcsin x) = \sin(\arcsin 2x)$$

d v s

$$1 - 2x^2 = 2x.$$

Denna ekvation har de båda lösningarna $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$, så dessa x är de enda som *möjligen* kan vara lösningar till den ursprungliga ekvationen. Däremot är det *inte säkert* att de är lösningar! Det finns ju många vinklar som har samma cosinus-värde. En enkel kontroll visar att $x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$ inte är en lösning, de båda leden är ej definierade för detta x. Däremot är $x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ en lösning, ty för detta x-värde är båda leden vinklar i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ och eftersom cosinus för båda led är lika är vänsterled och högerled lika (cosinusfunktionen är strängt avtagande på det intervallet).

3.55. Titta på tangens för uttrycket.

3.56. Rita en ny figur där du flyttar vinklarna lite grann.

3.58. Sätt $e^x = t$ och lös en andragradsekvation först.

4.3. Bryt ut det som är störst i täljare respektive nämnare, så är det lättare att se.

4.7. a) $\dfrac{\ln 3x}{\ln x^3} = \dfrac{\ln x + \ln 3}{3 \ln x} = \dfrac{1 + \frac{\ln 3}{\ln x}}{3} \to \dfrac{1}{3}$ då $x \to \infty$.

b) Förläng med konjugatet så fås

$$\sqrt{x^2+x}-x=\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=$$
$$=\frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\to\frac{1}{2}\text{ då } x\to\infty.$$

4.8. Observera först att A måste vara positivt, annars går uttrycket mot oändligheten. Förläng i täljare och nämnare med "konjugatet", $\sqrt{x^2+x}+Ax+B$.

4.13. Uppskatta varje term var för sig med den minsta termen, d v s

$$a_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Vad får man ut av detta?

4.14. $n \leq 2^n$.

4.16. a) $\displaystyle \frac{n^n}{(n-1)^n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = e^{n \ln \frac{n}{n-1}} = e^{-n \ln \frac{n-1}{n}} = e^{-n \ln(1-\frac{1}{n})} =$

$\displaystyle = e^{\frac{\ln(1-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}}} \to e$ då $n \to \infty$, ty $\displaystyle \frac{\ln(1-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}} \to 1$ då $n \to \infty$ (standardgränsvärde).

4.19. $0 < u_1 < 3$. Antag att $0 < u_p < 3$. Då är dels $u_{p+1} = \sqrt{3u_p} > \sqrt{3 \cdot 0} = 0$, dels $u_{p+1} = \sqrt{3u_p} < \sqrt{3 \cdot 3} = 3$ (eftersom $\sqrt{3x}$ är en strängt växande funktion). Alltså är $0 < u_n < 3$ för alla n enligt induktionsprincipen.
För att visa växande ser vi att

$$u_{p+1} - u_p = \sqrt{3u_p} - u_p = \frac{3u_p - u_p^2}{\sqrt{3u_p} + u_p} = \frac{u_p(3-u_p)}{\sqrt{3u_p} + u_p} > 0$$

eftersom $0 < u_p < 3$.
Följden är växande och uppåt begränsad. Av detta följer att följden är konvergent. Alltså gäller att u_p (och även u_{p+1} förstås) närmar sig ett värde U. Vi gör gränsövergång i rekursionsformeln och erhåller ekvationen $U = \sqrt{3U}$, vilken endast har lösningarna $U = 0$ och $U = 3$. Talföljden startar med $u_1 = 1$ och följden är växande. Av detta följer att gränsvärdet inte kan vara 0. Alltså är $\lim_{n\to\infty} u_n = 3$.

4.23. d) Täljare och nämnare $\to 0$ då $x \to 1$, så båda innehåller faktorn $x-1$. Faktorisera och stryk gemensamma faktorer.

i) Gemensam nämnare är bra att ha.

4.29. De enda punkter där funktionen möjligen är diskontinuerlig är $x = 0$ och $x = \pi/2$. Studera vad som händer med f då man närmar sig dessa punkter.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin 3x}{x} = 3 \\[2ex] \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} Ax + B = B \\[2ex] f(0) = B \end{cases}$$

så för att f ska vara kontinuerlig i $x = 0$ krävs att $B = 3$. Genom att på motsvarande sätt låta $x \to \pi/2$ fås att $A\dfrac{\pi}{2} + B = 1$, d v s $A = -\dfrac{4}{\pi}$ för att f ska vara kontinuerlig i $x = \pi/2$.

4.31. Bilda $h(x) = f(x) - g(x)$ och använd satsen om mellanliggande värde.

4.37. a) Täljaren påminner om en kvadrat.

4.39. a) $x^x = e^{x\ln x}$.

4.41. Vi försöker utnyttja standardgränsvärden.

a) $\dfrac{\sin 4x}{x-x^2} = \dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot\dfrac{4x}{x-x^2} = \dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot\dfrac{4}{1-x} \to 1\cdot 4 = 4$ då $x\to 0$ (ty $4x\to 0$ då $x\to 0$ och $\dfrac{\sin x}{x}\to 1$ då $x\to 0$.

d) $x\sin\dfrac{1}{x}\to 0$ då $x\to 0$ ty $x\to 0$ och $\sin\dfrac{1}{x}$ är begränsad. Här har vi alltså använt att $f(x)\cdot g(x)\to 0$ om $f(x)\to 0$ och $g(x)$ är begränsad.

e) $\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{x} = \dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2 \to 1\cdot 1\cdot 2 = 2$ då $x\to 0$ (ty $\sin x\to 0$ då $x\to 0$ och $\dfrac{e^x-1}{x}\to 1$ då $x\to 0$).

4.42. a) $\cos x - 1 = -2\sin^2\dfrac{x}{2}$

b) Sätt $x-\dfrac{\pi}{2} = t$

c) Sätt $\arcsin x = t$.

5.3. Vi tittar på hur sockermängden förändras över tiden. Vid tiden t är sockermängden $y(t)$ kg, så koncentrationen är $\dfrac{y(t)}{100}$ kg/l. Man tappar ur 5 l/min, så momentant tappar man ut $\dfrac{y(t)}{100}\cdot 5 = \dfrac{y(t)}{20}$ kg/min. Samtidigt fyller man på 5 l/min av en vätska med koncentration 0.1 kg/l, dvs påfyllning med $5\cdot 0.1 = \dfrac{1}{2}$ kg/min. Sammantaget så är sockermängdens förändring per tidsenhet $\dfrac{1}{2}-\dfrac{y(t)}{20}$ kg/min. Å andra sidan är förändringen per tidsenhet $y'(t)$. Alltså har vi sambandet $y'(t) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{y(t)}{20}$. Från början har man $0.15\cdot 100 = 15$ kg socker i behållaren, dvs $y(0) = 15$. Sammantaget fås sålunda sambandet

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{y(t)}{20} \\[2ex] y(0) = 15. \end{cases}$$

5.7. c) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3+(x+h)-(x^3+x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+x+h-x^3-x}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} 3x^2+3xh+h^2+1 = 3x^2+1.$

e) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

5.8. $k_{\text{tangent}} = y'(1),\ k_{\text{normal}} = -\dfrac{1}{k_{\text{tangent}}}$

5.12. I uppgifterna a), f) och g) kan det vara smart att använda logaritmlagar först.

5.15. Påminner det inte om derivatans definition? Vilken funktion är det som deriveras? I vilken punkt?

5.16. Den enda punkt där det kan vara problem är $x = 1$. Vi börjar med kontinuitetsundersökning. $f(x) \to 3$ då $x \to 1$ (måste undersöka gränsvärdet från både höger och vänster) och $f(1) = 3$, alltså är funktionen kontinuerlig i $x = 1$. För att undersöka deriverbarhet använder vi oss av definitionen. Vi får återigen göra gränsvärdesundersökning från såväl höger som vänster.

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\big((1+h)^2+2\big)-3}{h} = \lim_{h\to 0^+} (h+2) = 2$$
$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{((1+h)+2)-3}{h} = \lim_{h\to 0^-} 1 = 1$$

Eftersom höger- och vänstergränsvärden är olika, är funktionen ej deriverbar i $x = 1$. Däremot har funktionen höger- respektive vänsterderivata i denna punkt.

Alternativ: För att undersöka deriverbarhet, låt $g(x) = x^2 + 2$ och $h(x) = x + 2$. Om $g'(1) = h'(1)$ så är f deriverbar i punkten $x = 1$, och $f'(1) = g'(1)$ (förutsatt att f är kontinuerlig, i annat fall är förstås inte f deriverbar).

5.18. f skall vara kontinuerlig och $\dfrac{d}{dx}(ae^x + bx + x^2)$ och $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x+1}$ skall sammanfalla för $x = 0$.

5.20. $g'(35) = \dfrac{1}{f'(x)}$, där x är sådant att $f(x) = 35$.

5.25. Kvadratkomplettera eller derivera. Glöm inte att kontrollera att det är ett maximum.

5.26. Lokala extrempunkter kan finnas i de punkter där $f'(x) = 0$ eller där $f'(x)$ ej existerar (eller i definitionsmängdens ändpunkter, men några sådana finns ej här). För att undersöka om de funna punkterna är lokala extrempunkter kan man sätta upp en teckentabell (eller titta på andraderivatans tecken).

d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$ är deriverbar överallt.

$f'(x) = \dfrac{1-x^4}{(x^4+1)^{3/2}} = \dfrac{(1-x)(1+x)(1+x^2)}{(x^4+1)^{3/2}}$ vilket ger teckentabellen

x		-1		1	
$(1-x)$	$+$		$+$	0	$-$
$(1+x)$	$-$	0	$+$		$+$
$(1+x^2)$	$+$		$+$		$+$
$(x^4+1)^{3/2}$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$

Ur detta syns tydligt att f har lokalt minimum för $x = -1$ och lokalt maximum för $x = 1$.

5.28. Man behöver jämföra funktionsvärdena i följande punkter:

- punkter där $f'(x) = 0$
- punkter där $f'(x)$ ej existerar
- definitionsintervallets ändpunkter.

5.34. $f'(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{\cos x(\tan x - x)}{\sin^2 x} > 0$ då $0 < x < \pi/2$ (vi förutsätter att olikheten $\sin x < x < \tan x$ då $0 < x < \pi/2$ är känd). Alltså är funktionen strängt växande.

5.36. Bilda funktionen $f(x) = \arctan x - \dfrac{x}{x+1}$, $x > -1$. Derivatan av denna är $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{2x}{(1+x^2)(x+1)^2}$, så $f'(x) = 0$ omm $x = 0$. Teckenstudium av visar att $f'(x) < 0$ då $x < 0$ och $f'(x) > 0$ då $x > 0$. Funktionen har alltså ett strängt minimum för $x = 0$ och eftersom $f(0) = 0$ är alltså $f(x) \geq 0$ för alla $x > -1$, d v s $\arctan x \geq \dfrac{x}{x+1}$ för alla $x > -1$ v s b.

5.37. Bilda $f(x) = 3x^4 + 6x^2 - 8x^3 - 2$ och gör funktionsstudium.

5.40. Använd trigonometriska räknelagar så slipper du derivera.

5.44. c) Derivera en gång, så kanske du kan använda resultatet i a).
e) Leibniz' formel.

5.46. Använd Rolles sats ett antal gånger.

5.56. Titta på de båda olikheterna var för sig. För att visa den högra, bilda funktionen $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^4}{4!}$ och visa att $f(x) < 0$ då $x \neq 0$. Här räcker det inte att titta på f', man tvingas derivera ganska många gånger för att kunna uttala sig om derivatans nollställen.

5.58. *Alternativ 1*: Derivera $f(x) = x \ln x + (x \ln x)^2$ och derivera $g(x) = 1 + 2x \ln x$.
Alternativ 2: Undersök först vilka värden $y = x \ln x$ kan anta då $0 < x \leq 1/2$ och bestäm därefter vilka värden funktionen $y + y^2$ antar för dessa y.

5.81. Låt $x(t)$ och $y(t)$ vara avstånden från stegens ändpunkter till nedre punkten på väggen. Då är

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 10^2$$

enligt Pythagoras sats. Implicit derivering av detta samband (deriverling m a p t) ger

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0.$$

Vid den tidpunkt då $x(t) = 6$ och $x'(t) = 2$ ger det första sambandet att $y(t) = 8$ och det andra sambandet slutligen att $y'(t) = -\dfrac{3}{2}$. Stegens övre ände faller således med $\dfrac{3}{2}$ m/s.

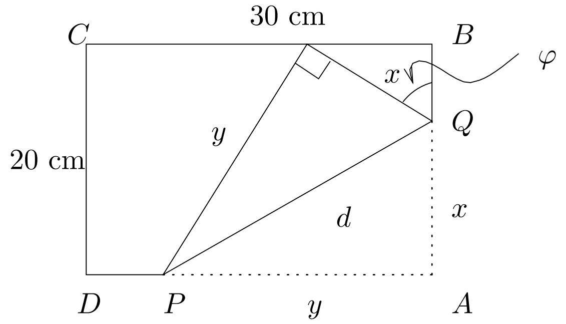
5.86. Ur figuren fås:

$$\frac{20 - x}{x} = \cos\varphi \text{ och } \frac{20}{y} = \sin\varphi$$

och ur detta fås att

$$d = 20\sqrt{\frac{1}{(1 + \cos\varphi)^2} + \frac{1}{\sin^2\varphi}}$$

där $\arcsin\dfrac{2}{3} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$.



Sträckan d blir minimal då funktionen $f(\varphi) = \dfrac{1}{(1 + \cos\varphi)^2} + \dfrac{1}{\sin^2\varphi}$ antar sitt minsta värde. Derivera, sök derivatans nollställen och rita teckentabell så ser du att minimum inträffar då $\varphi = \arccos\dfrac{1}{3}$ vilket ger att $x = 15$, dvs vik så att Q hamnar 15 cm från A.

6.2. Så när som på en konstant bör man känna igen funktionerna som derivator av något känt.

6.5. Man gissar väl på partiell integration. Vad är bra att derivera?

6.6. *b*)

$$\begin{aligned}
\int x \arctan x \, dx &= /P.I./ = \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2(x^2+1)} \, dx = \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C = \\
&= \frac{1}{2}(1 + x^2) \arctan x - \frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

6.7. Leta efter inre derivator. En funnen inre derivata pekar ut ett bra variabelbyte.

a) Faktorn $3x^2$ är ju just en inre derivata, derivatan av x^3+1. Alltså blir det bra att sätta $t = x^3+1$.
b) x är *nästan* en inre derivata, det är derivatan av $1+2x^2$ sånär som på en multiplikativ konstant. Sätt $1+2x^2 = t$.

6.10. a) Sätt $2x = t$.
b) Kvadratkomplettera under roten.
c) Sätt $e^x = t$.

6.12. Partiell integration.
a) $\arcsin x = 1 \cdot \arcsin x$. Integrera 1 och derivera $\arcsin x$
b) Samma idé som i uppgift a).

6.14. a) Partiell integration två gånger ger

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx = e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x(\cos x)\,dx\right) \ .$$

Samla integralerna på vänster sida så fås

$$2\int e^x \cos x = e^x \sin x + e^x \cos x$$

vilket ger

$$\int e^x \cos x = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) \ .$$

Detta är *en* primitiv funktion. *Alla* primitiva funktioner fås genom att addera på en godtycklig konstant C, d v s

$$\int e^x \cos x = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C \ .$$

6.18. a) Faktorisera nämnaren och partialbråksuppdela.
b) Polynomdivision.

6.22. a) *Alternativ 1*: Förläng med $\cos x$ i täljare och nämnare, använd trigonometriska ettan och sätt $\sin x = t$.
Alternativ 2: Sätt $\tan\frac{x}{2} = t$.
b) Vad är $\tan x$?
c) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.
d) $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$.

6.25. a) Sätt $\sqrt{x-2} = t$.

6.28. b) Partiell integration ger

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

En ommöblering ger då att $2\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ d v s

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

7.1. Hur definierar man integralen av en trappfunktion?

7.3. Dela intervallet $[0,1]$ i n delar och bilda en övertrappa $\Psi_n(x)$ och en undertrappa $\Phi_n(x)$ som i föregående uppgift. Integralen av dessa blir då

$$I(\Psi_n) = \frac{1}{n}\left(e^{1/n} + e^{2/n} + \cdots + e^{n/n}\right) = \frac{1}{n}e^{1/n}\frac{1-(e^{1/n})^n}{1-e^{1/n}} = (e-1)e^{1/n}\frac{1/n}{e^{1/n}-1}$$

och

$$I(\Phi_n) = \frac{1}{n}\left(1 + e^{1/n} + \cdots + e^{(n-1)/n}\right) = \frac{1}{n}\frac{1-(e^{1/n})^n}{1-e^{1/n}} = (e-1)\frac{1/n}{e^{1/n}-1}$$

där vi utnyttjat formeln för en geometrisk summa. Alltså är

$$(e-1)\frac{1/n}{e^{1/n}-1} \leq \int_0^1 e^x\,dx \leq (e-1)e^{1/n}\frac{1/n}{e^{1/n}-1}$$

och eftersom både vänstra och högra uttrycket närmar sig 1 då $n \to \infty$ (standardgränsvärden) så blir således

$$\int_0^1 e^x\,dx = e-1.$$

7.5. Medelvärdessatsen.

7.7. Vad säger analysens huvudsats?

7.9. Vi ser f som en sammansatt funktion: $f(u) = \int\limits_0^u \frac{\sin t}{t}\,dt$ där $u = \arcsin x$.

Analysens huvudsats och kedjeregeln ger

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{\sin u}{u}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}\ .$$

Alternativ: Låt $G(t)$ vara en primitiv funktion till $\frac{\sin t}{t}$. Då fås att

$$\int\limits_0^{\arcsin x} \frac{\sin t}{t}\,dt = [G(t)]_0^{\arcsin x} = G(\arcsin x) - G(0).$$

Derivera detta (denna lösning förutsätter att vi känner insättningsformeln).

7.13. a) Partiell integration går till precis som tidigare, och i de utintegrerade delarna skall gränserna sättas in:

$$\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \Big[x\sin x\Big]_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \Big[x\sin x + \cos x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

7.15. a) Vid variabelbyte gäller det att komma ihåg att ändra både dx och gränser.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2x\, e^{\sin x}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} 2\sin x\cos x\, e^{\sin x} =$$

$$= \Bigg/ \begin{array}{c} t = \sin x\ ,\ \frac{dt}{dx} = \cos x\ \Rightarrow\ dt = \cos x\,dx \\ x = 0\ \Rightarrow\ t = \sin 0 = 0\ ,\ x = \pi/2\ \Rightarrow\ t = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \Bigg/ =$$

$$= \int\limits_0^1 2te^t\,dt = /P.I./ = \big[2(t-1)e^t\big]_0^1 = 2.$$

7.16. a) Udda funktion, symmetriskt intervall kring origo.
b) Man vill nog gärna derivera $\ln x$. Alternativt delar man intervallet vid $x = 1$ och byter $1/x = t$ i den ena integralen.

7.23. Arean är $A = \int\limits_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$.

Alternativ 1: Sätt $\frac{x}{a} = \sin t\ ,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$.
Alternativ 2: Sätt $\frac{x}{a} = t$ och tolka den integral du får som arean av en halvcirkel.
Alternativ 3: Partialintegrera (men då ska du nog först göra samma variabelbyte som i alternativ 2.

7.25. Volymen blir $\pi\int\limits_0^4 y^2\,dx$ (skivformeln).

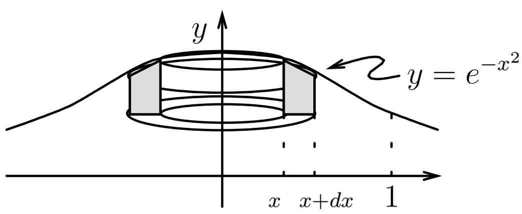
7.30. En kon kan fås genom att rotera en linje kring x-axeln.

7.32. Ta en lämplig del av halvcirkeln $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ och rotera kring x-axeln.

7.33. Gör lodräta snitt, parallella med skärningslinjen mellan planet och cylinderns bas. Ett snitt på avståndet x från denna linje blir en rektangel med bas $2\sqrt{r^2 - x^2}$ och höjd $\dfrac{h}{r}x$.

7.34. Vilken kurva i xy-planet har man roterat kring x-axeln?

7.37. Alternativ 1: Betrakta det tunna rör som uppkommer då området mellan x och $x+dx$ roterar ett varv runt y-axeln. Rörets volym är då approximativt



$$dV = 2\pi x(y - \frac{1}{e})\,dx$$

($(y - \frac{1}{e})\,dx$ är tvärsnittets area, $2\pi\,x$ är den sträcka som tvärsnittets tyngdpunkt rör sig vid rotationen).

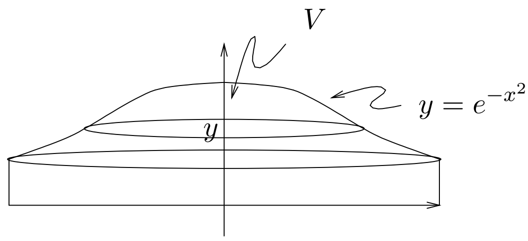
Summering av alla rörvolymer, förfinad indelning och gränsövergång ger att

$$V = \int\limits_0^1 2\pi x(e^{-x^2} - \frac{1}{e})\,dx = \left[-\pi e^{-x^2} - \frac{x^2}{2e}\right]_0^1 = \pi(1 - \frac{2}{e})\ .$$

Alternativ 2: Ett snitt på höjden y har tvärsnittsarean

$$A(y) = \pi x^2 = \pi(-\ln y)\ .$$

Volymen blir alltså



$$V = \int\limits_{1/e}^1 \pi(-\ln y)\,dy = [-\pi(y\ln y - y)]_{1/e}^1 = \pi(1 - \frac{2}{e})\ .$$

7.40. Hur ser tvärsnittsarean ut på höjden z?

7.44. Längden är $\int ds$ där bågelementet $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$

7.47. Bågelementet är

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\, dx = \\ &= \sqrt{\frac{(1-x^2)^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2}}\, dx = \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}\, dx = \left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right| dx \end{aligned}$$

så kurvans längd är

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{1/2} \left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right| dx = \int_0^{1/2} \frac{1+x^2}{1-x^2}\, dx = \\ &= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 1\right) dx = \left[\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - x\right]_0^{1/2} = \ln 3 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

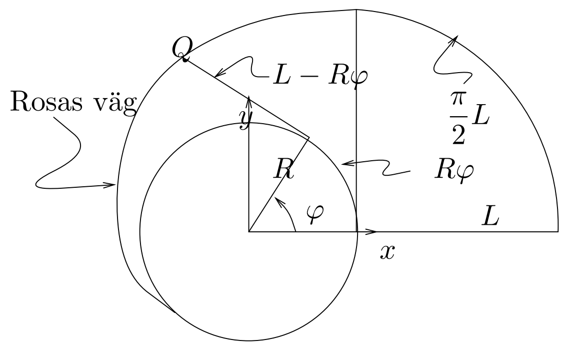
7.52. Båglängden i polära koordinater är $ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$

7.53. (x, y) kan parametriseras med hjälp av θ: $\begin{cases} x = R(\theta - \sin\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta) \end{cases}$.

7.55. Parametrisera begränsningskurvan m h a polära koordinater. Areaelementet i polära koordinater är $dA = \frac{r^2}{2}\, d\theta.$

7.57. Först går Rosa längs en kvartscirkel med radie L vilket ger sträckan $\frac{\pi}{2}L$. Därefter börjar snöret vinda upp sig på trädet (se figuren nedan).

När snöret är uppvindat vinkeln φ befinner sig Rosa i punkten Q, som har koordinaterna $x = R\cos\varphi - (L - R\varphi)\sin\varphi$, $y = R\sin\varphi + (L - R\varphi)\cos\varphi$. Rosa kommer in till stammen då $L = R\varphi$, dvs då $\varphi = \frac{L}{R}$. Längden av spiralen blir alltså $\int_0^{L/R} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi =$ $\int_0^{L/R} (L - R\varphi)\, d\varphi = \left[L\varphi - \frac{r\varphi^2}{2}\right]_0^{L/R} = \frac{L^2}{2R}$. Rosa har alltså gått sammanlagt $\frac{\pi L}{2} + \frac{L^2}{2R}$ då hon kommer in till stammen.



7.58. Cirkeln $r = \cos\theta$ kan skrivas $r^2 = r\cos\theta$, dvs $x^2 + y^2 = x$. Flytta över och kvadratkomplettera, så du ser vad det är för cirkel. Den andra cirkeln hanteras på motsvarande sätt. Rita en figur, så kanske du ser att du klarar dig utan integraler.

7.61. *Alternativ 1*: Skär upp konen längs en generatris och vik ut konen till en plan figur, som blir en del av en cirkel.
Alternativ 2: Rotera linjen $y = \frac{R}{h}x$ ett varv kring x-axeln.

7.62. Lägg halvcirkelskivan med den raka kanten på x-axeln och y-axeln som symmetriaxel. Då kommer tyngdpunkten att hamna på y-axeln. Tyngdpunktens x-koordinat fås som

$$x_{tp} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = \frac{\int y\rho\,dA}{\int \rho\,dA} = \frac{1}{A}\int y\,dA.$$

Det y som finns i integralen är tyngdpunktens, för areaelementet dA, y-koordinat. Titta på små strimlor parallella med y-axeln. De har tyngdpunkten på halva höjden, d v s $y = \dfrac{\sqrt{R^2 - x^2}}{2}$ och areaelementet $dA = \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$.

7.70. a) Titta på $\displaystyle\int_0^T \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ och sätt $e^x = t$. Vad händer då $T \to \infty$?

g) Titta på $\displaystyle\int_\epsilon^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$. Vad händer då $\epsilon \to 0^+$?

8.1. a) I punkter på linjen $x + y = C$ är lutningen $y' = C$. Rita små streck med denna lutning i t ex punkter (x, y) där x och y är små heltal.

8.11. Först skriver vi om ekvationen så att koefficienten framför y' blir 1. Ekvationen blir

$$y' + \frac{10}{x}y = \frac{\ln x}{x}\ .$$

Sedan bestämmer vi en primitiv funktion till $\dfrac{10}{x}$ vilket blir $10\ln x$. Därefter multiplicerar vi ekvationen med den *integrerande faktorn* $e^{10\ln x} = x^{10}$ och får

$$x^{10}\,y' + 10x^9\,y = x^9\ln x\ .$$

Allt detta är gjort för att vänsterledet skall bli derivatan av en känd produkt, nämligen produkten melan y och den integrerande faktorn. Vi har alltså fått

$$\frac{d}{dx}(x^{10}\,y) = x^9 \ln x$$

vilket i sin tur ger

$$x^{10}\,y = \int x^9 \ln x\,dx = \frac{1}{10}x^{10}\ln x - \frac{1}{100}\,x^{10} + C$$

och ur detta erhåller vi

$$y = \frac{1}{10}\ln x - \frac{1}{100} + C\,x^{-10}\ .$$

Sätter vi till sist in villkoret $y(1) = 0$ får vi att $C = \dfrac{1}{100}$ vilket ger lösningen

$$y = \frac{1}{10}\ln x - \frac{1}{100} + \frac{1}{100}\,x^{-10}\ .$$

8.19. Om proportionalitetskonstanterna är λ_a respektive λ_b så fås ekvationerna $A' = -\lambda_a A$, $B' = \lambda_a A - \lambda_b B$ och $C' = \lambda_b B$

8.23. Man behöver vara bekant med Ohms och Kirchhoffs lagar.

8.24. a) Differentialekvationen kan skrivas som

$$y\frac{dy}{dx} = x$$

vilket, skrivet på differentialform, blir

$$y\,dy = x\,dx\ .$$

Vi har således separerat variablerna. Av detta följer nu att

$$\int y\,dy = \int x\,dx \qquad \text{d v s} \qquad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + D \quad (2D = C \text{ nedan})$$

så $y = \sqrt{x^2 + C}$ eller $y = -\sqrt{x^2 + C}$, $(|x| > \sqrt{-C}$ om $C \leq 0)$.

d) Dividera ekvationen med e^y så får du separerade variabler.

8.27. a-b) Vi möblerar om ekvationen för att försöka få den att se separabel ut.

$$xy' + y^2 = 1 \ \Leftrightarrow\ xy' = 1 - y^2.$$

Om $y \neq \pm 1$ och $x \neq 0$ så kan vi korsdividera, och får $\dfrac{y'}{1 - y^2} = \dfrac{1}{x}$, dvs en separabel ekvation. Integrera båda led m a p x så fås $\displaystyle\int \frac{dy}{1 - y^2} = \int \frac{dx}{x}$. Vi tar fram en primitiv funktion till vänsterledet:

$$\int \frac{dy}{1 - y^2} = \int \frac{dy}{(1 - y)(1 + y)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1 - y} + \frac{1}{1 + y}\right) dy = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + y}{1 - y}\right|$$

Ur detta får vi sålunda sambandet

$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \ln|x| + C$ där C är en reell konstant.

Vi försöker lösa ut y ur detta och får efter succesiva omskrivningar

$$\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = 2\ln|x| + 2C = \ln x^2 + D\ ,\ D > 0$$

$$\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = e^{\ln x^2 + D} = Ex^2\ (E = e^D > 0)$$

$$\frac{1+y}{1-y} = \pm Ex^2 = Fx^2\ (F = \pm E \neq 0)$$

$$1 + y = Fx^2(1-y)\ (F \neq 0)$$

$$y(Fx^2+1) = Fx^2 - 1\ (F \neq 0)$$

$$y = \frac{Fx^2-1}{Fx^2+1}\ (F \neq 0)$$

Dessutom måste vi undersöka fallen $y = 1$ respektive $y = -1$. En kontroll visar att båda dessa konstanta funktioner är lösningar till den ursprungliga differentialekvationen. Alltså har vi lösningarna

$$y = \frac{Fx^2-1}{Fx^2+1}\ (F \neq 0) \text{ eller } y = \pm 1.$$

Konstanten bestäms sedan av villkoret på $y(1)$.

8.32. a) Derivera integralekvationen så fås, m h a analysens huvudsats, att $y' = y$. Genom att dessutom stoppa in $x = 0$ i integralekvationen fås villkoret $y(0) = 1$. Lös differentialekvationen under detta villkor.

8.35. Villkoren i texten ger upphov till differentialekvationen $y' = \dfrac{y - \alpha(x+y)}{x-0}$ d v s $y' + \dfrac{\alpha - 1}{x}y = -\alpha$. Dessutom gavs villkoret $y(1) = 0$ vilket behövs för att bestämma integrationskonstanten. Notera även att fallet $\alpha = 0$ måste specialbehandlas, även om det inte syns från början.

8.37. a) Karakteristiska polynomet är $r^2 - 3r + 2 = 0$ vilket har de båda lösningarna $r = 1$ resp $r = 2$. De homogena lösningarna är därför $y = Ae^x + Be^{2x}$.

c) Här blir det karakteristiska polynomet $r^2 + 2r + 1 = 0$ vilket har dubbelroten $r = -1$. Av detta följer att lösningarna blir $y = (Ax + B)e^{-x}$.

e) Karakteristiska polynomet blir $r^2 - 6r + 10 = 0$ vilket har de båda lösningarna $r = 3 \pm i$. De homogena lösningarna är då $y = Ae^{(3+i)x} + Be^{(3-i)x}$ vilket även kan skrivas på den trevligare formen $y = e^{3x}(C\cos x + D\sin x)$.

8.39. a) För att finna en partikulärlösning ansätter vi $y = Ax^2 + Bx + C$ (polynom av samma gradtal som i högerledet).

c) Här saknas den oderiverade y-termen. Ansätt $y = (Ax^2 + Bx + C)x$ för att finna en partikulärlösning.

8.40. a) Karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r - 8 = 0$, vilken har rötterna $r = 2,\ -4$ så homogena lösningarna blir

$$y_h = Ae^{2x} + Be^{-4x} \ .$$

För att finna en partikulärlösning ansätter vi $y = z(x)e^{5x}$ och deriverar två gånger. Vi får

$$y' = (z' + 5z)e^{5x} \ , \ y'' = (z'' + 10z' + 25z)e^{5x}$$

och sätter vi in detta i ekvationen fås

$$(z'' + 12z' + 27z)e^{5x} = e^{5x} \ .$$

Efter att ha dividerat med e^{5x} erhåller vi differentialekvationen

$$z'' + 12z' + 27z = 1$$

vilket har en lösning $z = \dfrac{1}{27}$. Ur detta fås en partikulärlösning, $y_p = \dfrac{1}{27}e^{5x}$, så samtliga lösningar ges som

$$y = y_h + y_p = Ae^{2x} + Be^{-4x} + \frac{1}{27}e^{5x} \ .$$

8.41. a) För att finna en partikulärlösning kan vi gå till väga enl följande.
Alternativ 1: Ansätt $y = A\cos x + B\sin x$.
Alternativ 2: $\cos x$ är realdelen av e^{ix}. Bestäm en partikulärlösning, u_p , till ekvationen $u''+4u'+4u = 25e^{ix}$ så fås en partikulärlösning till den ursprungliga ekvationen som $y_p = \operatorname{Re} u_p$.

8.57. Betrakta behållaren då metallen stelnat till radien r. Om höjden vid radien t är $h(t)$ så är den stelnade volymen

$$V_s = \int_r^R 2\pi t\, h(t)\, dt$$

enligt rörformeln. Å andra sidan är volymen av den metall som ej stelnat $\pi r^2 h(r)$ så den mängd metall som stelnat är alltså $\pi(R^2H - r^2h(r))$ och den mängden har minskat med faktorn k under stelningen. Således är även

$$V_s = k\pi(R^2H - r^2h(r)) \ .$$

Lös den integralekvation som uppkommit.

9.6. Maclaurinutveckling av e^x ger

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{e^{\theta x}}{720}x^6$$

och eftersom den sista termen garanterat är minst 0 följer olikheten direkt.

9.9. a) Maclaurinutveckling av ordning 4 av exponentialfunktionen ger

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^5B(x).$$

Multiplikation ger därpå

$$\begin{aligned} e^x(1+x) &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+x+x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6} \\ &+ x^5B(x)+\left(\frac{x^5}{24}+x^6B(x)\right)= \\ &= 1+2x+\frac{3x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{5x^4}{24}+x^5B_1(x) \end{aligned}$$

där vi i sista ledet slagit samman termerna

$$x^5B(x)+\left(\frac{x^5}{24}+x^6B(x)\right)=x^5\left(B(x)+\frac{1}{24}+xB(x)\right)=x^5B_1(x)\ .$$

Entydigheten hos maclaurinutvecklingar visar att det vi fått fram är maclaurinutvecklingen av ordning 4, så det sökta polynomet är

$$1+2x+\frac{3x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{5x^4}{24}\ .$$

9.12. Maclaurinutveckla till ”lämpligt” gradtal i täljare och nämnare. Vad som är lämpligt styrs av att konstanterna framför lägstagradstermen i täljare respektive nämnare måste vara bestämda. Vi illustrerar med att lösa uppgift d).

d) $\dfrac{\ln\cos x}{e^x-1-x}=\dfrac{\ln(1-\frac{x^2}{2}+x^4B_1(x))}{1+x+\frac{x^2}{2}+x^3B_2(x)-1-x}=\dfrac{\ln(1-\frac{x^2}{2}+x^4B_1(x))}{\frac{x^2}{2}+x^3B_2(x)}$

Funktionerna $B_1(x)$ och $B_2(x)$ (liksom kommande B-funktioner) är begränsade då x ligger nära 0. Nu noterar vi att $-\dfrac{x^2}{2}+x^4B_1(x)\to 0$ då $x\to 0$, alltså kan vi använda oss av maclaurinutvecklingen av $\ln(1+t)=t+t^2B_3(t)$, där $t=-\dfrac{x^2}{2}+x^4B_1(x)$. Då får vi

$$\frac{\ln\cos x}{e^x-1-x}=\frac{-\frac{x^2}{2}+x^4B_1(x)+\left(-\frac{x^2}{2}+x^4B_1(x)\right)^2B_3\left(-\frac{x^2}{2}+x^4B_1(x)\right)}{\frac{x^2}{2}+B_2(x)}=$$

$$\frac{-\frac{x^2}{2}+x^4B_4(x)}{\frac{x^2}{2}+x^3B_2(x)}=\frac{-\frac{1}{2}+x^2B_4(x)}{\frac{1}{2}+xB_2(x)}\to -1 \text{ då } x\to 0.$$

9.14. Taylorutvecklingen runt $x=2$ är användbar. Hur ser resttermen ut?

9.15. a) Gör liknämningt och maclaurinutveckla $\sin x$.

9.17. Derivatans definition och maclaurinutveckling av $\cos x$.

9.26. Använd entydighet hos maclaurinutvecklingar.

10.1. a) Den summan bör du känna igen.
b) Skriv ut termerna.
c) Logaritmlagar.
d) Som i a).

10.2. b) Partialbråksuppdela.

c) Titta på $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k}\right)$, skriv ut termerna och använd logaritmlagar.

10.4. a) Detta är en positiv serie, d v s termerna $\frac{k}{k^2+1} \geq 0$. Termerna borde se ut ungefär som $\frac{1}{k}$ när k är stor. Alltså gör vi en jämförelse på kvotform:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{k^2+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{k}} = 1.$$

Eftersom $0 < 1 < \infty$ så följer att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$ och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ har samma konvergensegenskaper. Vidare är det känt att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ är konvergent omm $\alpha > 1$, så $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent. Allt detta utmynnar sålunda i att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$ är divergent.

f) Här kan man använda standardgränsvärden eller maclaurinutvecklingar för att se vad man ska jämföra med.

10.7. Cauchys integralkriterium kan hjälpa.

10.9. d) $a_k = \sin\left(k\pi + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = (-1)^k \sin\frac{1}{\sqrt{k}}$. Av detta syns tydligt att

- Termerna alternerar, d v s varannan term är positiv och varannan är negativ.
- $|a_k| = \sin\frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$ då $k \to \infty$.
- $|a_{k+1}| = \sin\frac{1}{\sqrt{k+1}} < \sin\frac{1}{\sqrt{k}} = |a_k|$, d v s termernas belopp avtar.

Enligt Leibniz' kriterium är sålunda $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(k\pi + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ konvergent. Däremot är serien ej absolutkonvergent, ty $\frac{|a_k|}{\frac{1}{\sqrt{k}}} \to 1$ då $k \to \infty$, och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ är divergent.

e) Vi undersöker absolutkonvergens. $\left|\frac{(-1)^k \ln k}{k^2}\right| = \frac{\ln k}{k^2} \leq \frac{\sqrt{k}}{k^2} = \frac{1}{k^{3/2}}$ då k är tillräckligt stort (eftersom $\frac{\ln k}{\sqrt{k}} \to 0$ få $k \to \infty$), och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ är konvergent. Alltså är $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k^2}$ absolutkonvergent (jämförelse mellan posiviva serier).

10.10. b) Vi börjar med konvergensradien. Cauchys kvotkriterium ger

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k\cdot 2^k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[k]{k}} = \frac{1}{2}$$

så konvergensradien är $R = 2$ (d v s serien konvergerar för alla x med $|x| < 2$ och divergerar för alla x med $|x| > 2$. Vi får undersöka $x = \pm 2$ separat.

$x = 2$ ger serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ som är divergent.

$x = -2$ ger serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ som är konvergent enligt Leibniz' kriterium (eller hur).

Slutsats: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k\cdot 2^k}$ är konvergent omm $-2 \le x < 2$

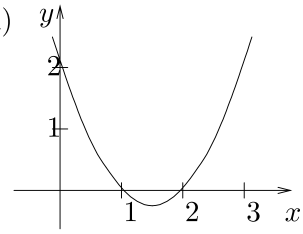
12 Svar

1.1. a) $(x+1)^2$ b) $(x-3)^2-9$ c) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

1.2. a) $-1/4$

b) $x=1$ eller $x=2$

c) $x \le 1$ eller $x \ge 2$

d) 

1.3. $x \ge -2$.

1.4. a) $x=\dfrac{a+b}{2}$, $y=\dfrac{a-b}{2}$ b) $(x,y,z)=(3,2,1)$
c) $(x,y)=(1,0)$ eller $(2,1)$ eller $(2,-1)$ d) $(x,y)=\pm(2,1)$ eller $\pm(1,2)$.

1.5. a) $x>3$ eller $x<-1$ b) $-5<x\le -3$ eller $x \ge 1/2$
c) $x \le -1/3$ eller $1/2<x\le 1$ eller $x>2$.

1.8. a) $x=-2$ eller $x=4$ b) $x=-4$ eller $x=-\dfrac{2}{5}$

1.9. $x=-1$ eller $x=2$.

1.10. a) $-6.5<x<1.5$ b) $-1\le x\le 2$ c) $-6<x<-3$ eller $1<x<2$.

1.12. a) Kvoten är x^2+3x-3 och resten är $-4x^2+2x+2$
b) Kvoten är $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ och resten är 0
c) Kvoten är x^2-2x+3 och resten är $-2x+10$.

1.13. a) 0 b) $2^{100}-2^{11}+1$ c) 0.

1.14. a) $(x-1)(x+1)$ b) $(x+1)(x^2-x+1)$ c) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$

d) $x(x+3)(x^2-3x+9)$ e) $(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

1.15. a) $\dfrac{a+b}{a-b}$ $(a,b\neq 0\ ,\ a\neq -b)$ b) $\dfrac{a+2}{a}$ $(a\neq -1,\ -2,\ -3)$

c) $\dfrac{x-2}{1-x}$ $(x\neq -1,0,2)$.

1.18. $y=\dfrac{ab}{a+b}$ och av detta kan vi se att $y<a$ och $y<b$.

1.19. a) $\dfrac{R_2}{R_1+R_2}I$ b) $\dfrac{R_1}{R_1+R_2}E$

1.20. a) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ b) $|R|$.

1.21. a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}k(k+1)$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}3^k$.

1.22. a) 225 b) 0 c) 297 d) $n+1$.

1.23. a) $6\cdot(1-\frac{1}{2^{n+1}})$ b) $\frac{1-e^{-n}}{e-1}$ c) $20000\cdot((1.05)^{101}-1)$ d) $\frac{7}{32}$.

1.24. 1683.

1.25. a) 2^{63} mm, d v s 9’223’372’036’854.775 808 km d v s c:a 0.975 ljusår.
b) $2^{64}-1$ öre, d v s 184’467’440’737’095’516 kronor och 15 öre d v s c:a 150’000 gånger så mycket som den svenska statsskulden (oktober 1994).

1.26. a) 1’000 kr
b) $1'000\,\frac{1.1^{10}}{1.1^{10}-1}\approx 1'627$ kr
c) 5’500 kr respektive $10'000\,\frac{1.1^{10}}{1.1^{10}-1}-10'000\approx 6275$ kr.

1.27. a) 33 b) 20 c) 54 (dvs $101-33-20+6$).

1.29. 9.

1.30. $A_{max}=\frac{25}{4}\,\mathrm{m}^2$, rektangeln är en kvadrat

1.31. $H=\frac{2vV}{v+V}$ resp $A=\frac{v+V}{2}$ och $H\le A$.

1.37. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

1.41. 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720.

1.42. a) 10 b) 36 c) 126 d) 36 e) 499500

1.43. a) $2\cdot\binom{6}{2}=30$ b) $\binom{10}{8}=\binom{10}{2}=45$ c) $(1+1)^3=2^3=8$

1.44. a) $\frac{n(n-1)}{2}$ b) $\binom{n+1}{2}=\frac{(n+1)n}{2}$ c) $\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

1.45. a) $\binom{39}{7}=15\,380\,937$ b) $\binom{3}{1}^{13}=1\,594\,323$

c) $\binom{30}{8}=5\,852\,925$ d) $\binom{52}{5}=2\,598\,960$

1.46. a) $1+3x+3x^2+x^3$ b) $27-54x+36x^2-8x^3$ c) $1+4x+6x^2+4x^3+x^4$

1.47. a) 105 b) 84.

1.48. $a=\pm\frac{1}{4}$

2.1. a) 1 resp –4 b) –1 resp 2 c) 7 resp 0 d) 0 resp 1 e) 0 resp –4.

2.2. a) $-4+2i$ b) $-3+5i$ c) $4-3i$ d) $2i$ e) $18-26i$ f) 17.

2.3. a) $2-2i$ b) $-6+8i$ c) $7+22i$

d) $-5-12i$ e) $-236-115i$ f) $138+53i$

2.4. $5+11i$

2.5. a) $1-2i$ b) $2+7i$ c) –3 d) 2 e) $\sqrt{2}$ f) 1 g) $\sqrt{5}$ h) 2

2.6. a) 20 b) a^2+b^2

2.7. a) $\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$ b) $\frac{3}{13}-\frac{2i}{13}$ c) $-i$ d) $\frac{i}{2}$ e) $-i$.

2.8. a) $\sqrt{13}$ b) $\sqrt{13}$ c) 13

2.9. a) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ förutsatt att $a^2+b^2\neq 0$ b) $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$

2.10. a) $|z_1|=5^6$ b) $|z_2|=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ c) 2.

2.11. $z=2-\dfrac{i}{2}$.

2.12.
a) En lodrät linje som skär x-axeln vid $x=-2$
b) En vågrät linje som skär y-axeln vid $y=4$
c) Högra halvplanet
d) Linjen $y=2-x$ (y=imaginärdel, x=realdel)

2.13.
a) Cirkel med radie 2 runt origo
b) Cirkel med radie 3 runt punkten $z=1$
c) Cirkel med radie 1 runt punkten $z=1-2i$
d) Cirkelskiva med radie 3 runt origo
e) Området utanför cirkelskivan i uppgift d)
f) Cirkelring med innerradie 2 och ytterradie 4 runt $z=-3$.

2.14. a) $z\overline{z}$ b) $z\overline{z}-z-\overline{z}+1$.

2.15. Alla rent imaginära tal.

2.16. Alla z på cirkeln $\left|z+\dfrac{5}{3}\right|=\dfrac{4}{3}$.

2.19. a) $2e^{i0}$ b) $3e^{i\pi}$ c) $e^{-i\pi/2}$
d) $\sqrt{2}e^{-i3\pi/4}$ e) $2e^{i\pi/3}$ f) $2\sqrt{3}e^{i2\pi/3}$.

2.20. a) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$ b) $1+i$

2.21. a) $\dfrac{-11\pi}{12}+k\,2\pi,\ k$ heltal b) $\dfrac{5\pi}{12}+k\,2\pi,\ k$ heltal.

2.22. 1.

2.23. a) -4 b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ c) $-2^{99}(1+i\sqrt{3})$.

2.24. a) $\frac{11\pi}{30}$ b) $-\frac{\pi}{30}$ c) Nej, det enda man kan säga är att $\frac{\pi}{6}<\arg(z+w)<\frac{\pi}{5}$

2.25. $i(t)=\frac{1}{10\sqrt{2}}\sin(100t-\frac{5\pi}{12})$.

2.26. $\cos 5\theta=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta$.

2.27. $\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$
$\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$.

2.28. $\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$.

2.29. $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{8}\cos 4\theta$.

2.30. $z=\frac{\pi}{2}+n\pi$.

2.31. $|z|=\frac{\omega RL}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$

2.32. $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Z=R$

2.33. $Z=\frac{R}{1+(\omega RC)^2}+i\left(\omega L-\frac{\omega R^2C}{1+(\omega RC)^2}\right)$
Z blir reell om $\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{(RC)^2}}$ (förutsatt att $L\le R^2C$).

2.34. -1 respektive $-5-i$.

2.35. e^x.

2.37. a) $z=\pm 4i$ b) $z=-3\pm i$ c) $z=\pm\frac{3}{2}i$

2.38. a) $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{6}-i\sqrt{2})$ b) $\pm(3+2i)$.

2.39. a) $z=-4\pm 3i$ b) $\frac{-1\pm 7i}{5}$ c) $\pm 1+i$

2.40. a) $z_1=i$, $z_2=-1+i$ b) $z_1=\frac{1}{2}+i$, $z_2=1+i$
c) $\pm 1+i$ d) $z_1=-i$, $z_2=-3i$.

2.41. a) $z=2$ eller $z=-1\pm i\sqrt{3}$ b) $z=i$ eller $z=\frac{\pm\sqrt{3}-i}{2}$

c) $z=\pm\sqrt{2}(1\pm i)$ d) $z=\sqrt[6]{2}e^{\left(-\frac{\pi}{12}+n\frac{2\pi}{3}\right)i}$, $n=0,1,2$

e) $z=\pm i\sqrt{2}$ eller $z=\pm\frac{\sqrt{6}\pm i\sqrt{2}}{2}$ f) $z=\sqrt[3]{2}e^{\left(\frac{2\pi}{9}+n\frac{2\pi}{3}\right)i}$, $n=0,1,2$

2.42. $z = 0$, $z = 1 - i$ eller $z = \dfrac{1-i}{2}$.

2.43. $z = 0$, 1 , -1 , i , $-i$.

2.44. $\pm(1 \pm 2i)$.

2.45. a) $z = -2$ eller $z = 1 \pm 2i$ b) $z = 1$ eller $z = -3 \pm 2i$

2.46. a) $1,\ -1,\ -2$ b) $-4,\ \pm\sqrt{3}$ c) $2,\ -3,\ -1 \pm 2i$

2.47. $P(z) = (z-1)^3 \left(z + \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)\left(z + \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$.

2.48. a) $(x+1)(x+2)^2$ b) $2(x+1)(x-2)(x-3)$ c) $(x-2)(x+3)(x^2+x+1)$

2.49. $x = -1$, $x = 2$ eller $x = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

2.50. $z = 1 \pm i$ eller $z = -3 \pm i$.

2.51. $a_0 = 5,\ a_1 = -2,\ a_2 = 11,\ a_3 = -4,\ a_4 = 7,\ a_5 = -2$.

2.52. $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$.

2.53. b) $x_1 + x_2 + x_3 = -a$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b$, $x_1x_2x_3 = -c$.

2.54. $-48 - 6i$.

2.55. $z^2 + (2b - a^2)z + b^2 = 0$.

2.56. Rötterna är $z = \pm 2i$, $1 \pm i$.

2.57. $a = 0$. Nollställena är $\pm(1 \pm i)$.

2.58. Rötterna är $1 \pm 2i$, $-2 \pm i$.

2.59. Ett nollställe.

2.60. a) $w^6 + w^3 - \dfrac{1}{27} = 0$ b) $t = \dfrac{-9 \pm \sqrt{93}}{18}$

c) $w = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{93}-9}{18}} \cdot e^{2n\pi i/3}$ eller $w = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{93}+9}{18}} \cdot e^{(\pi + 2n\pi)i/3}$ där $n = 0,\ 1,\ 2$.

d) $z = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{93}-9}{18}} \cdot e^{2n\pi i/3} - \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{93}+9}{18}} \cdot e^{-2n\pi i/3}$ där $n = 0,\ 1,\ 2$.

3.1. a) c) och d) visar grafer till funktioner. Däremot är inte figur b) graf till en funktion, ty till vissa x-värden svarar flera olika y-värden.

3.2. a) 12 b) –23 c) $7x + 12$ d) 131

3.3. a) $D_f = \mathbf{R}$, $V_f = [2, \infty[$ b) $D_f = [7, \infty[$, $V_f = [0, \infty[$

c) $D_f =]-\dfrac{2}{3}, \infty[$, $V_f =]0, \infty[$ d) $D_f = \mathbf{R}$, $V_f = \mathbf{R}$

e) $D_f = [0, \infty[$, $V_f = [-1, \infty[$ f) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $V_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

3.4. Faktorn k innebär en skalning faktorn k i y-led.

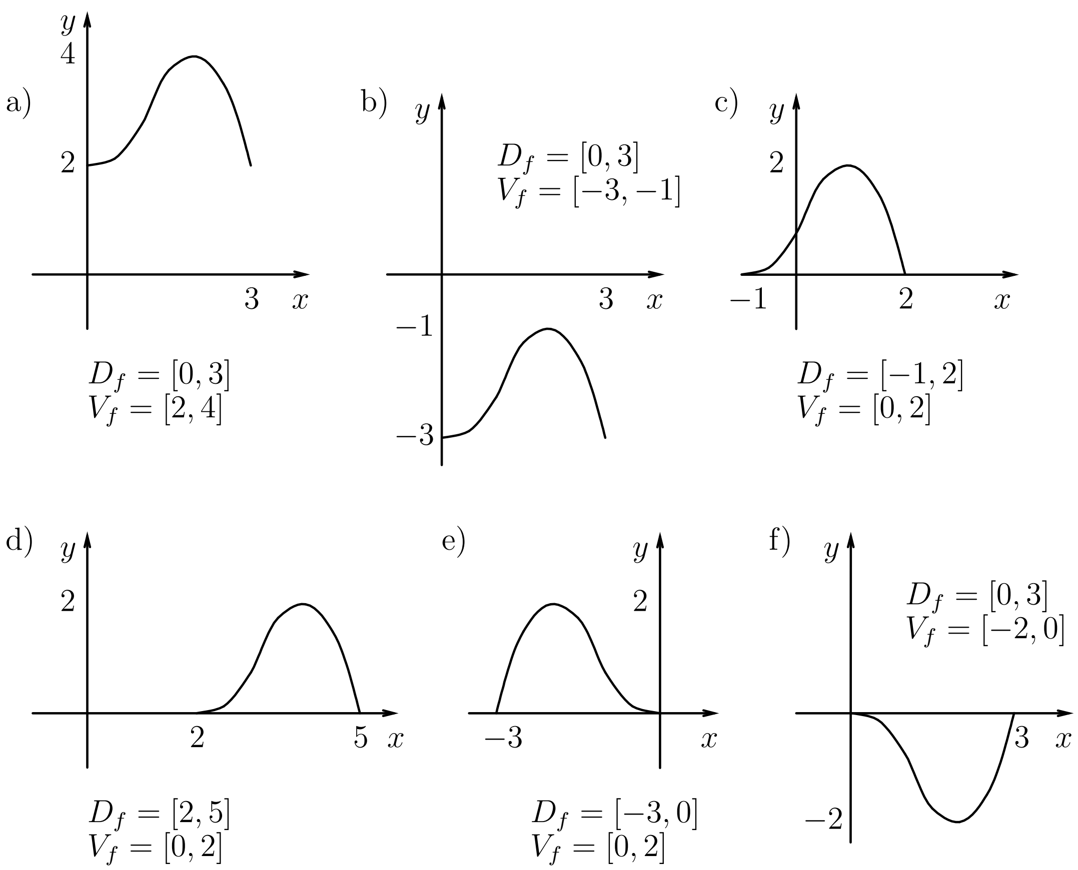
3.5. Faktorn b innebär en translation (förflyttning) "sträckan" b i y-led.

3.6. Translation "sträckan" a i x-led. Exempelvis betyder $f(x) = (x-2)^2$ att kurvan $f(x) = x^2$ flyttats två enheter åt höger och $f(x) = (x+4)^2$ att kurvan $f(x) = x^2$ flyttats 4 enheter åt vänster.

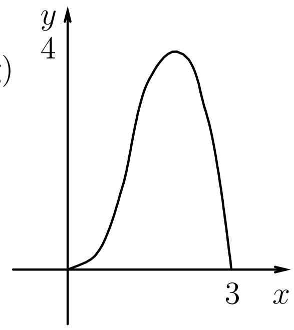
3.7. $x = 1/2$ eller $x = 1$.

3.8. a) $[1, \infty[$ b) $[-\dfrac{37}{12}, \infty[$ c) $[q - \dfrac{p^2}{4}, \infty[$.

3.9.

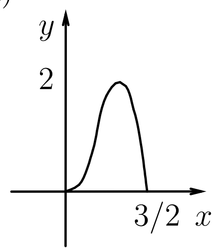


g)



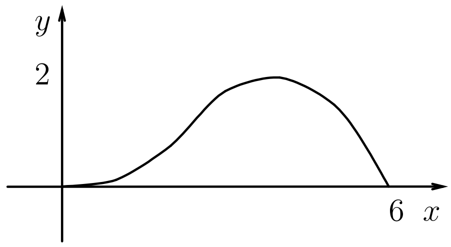
$D_f = [0, 3]$
$V_f = [0, 4]$

h)



$D_f = [0, 3/2]$
$V_f = [0, 2]$

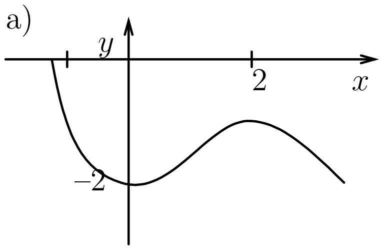
i)



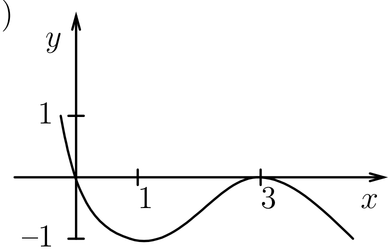
$D_f = [0, 6]$
$V_f = [0, 2]$

3.10.

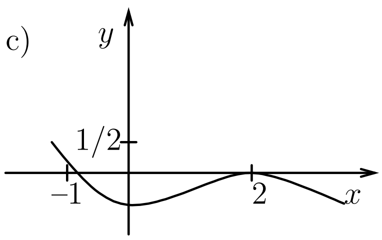
a)



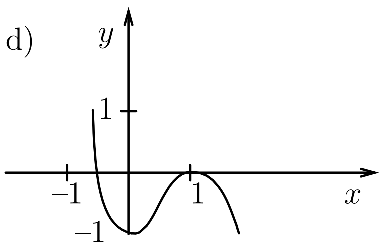
b)



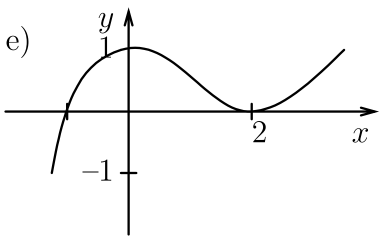
c)



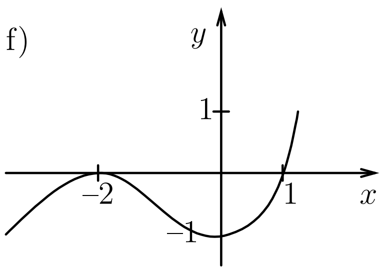
d)



e)

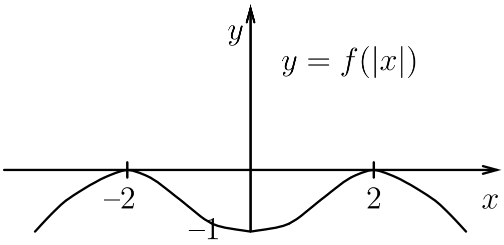


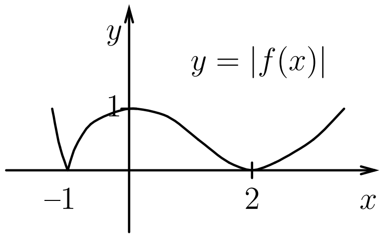
f)



3.11. $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x)\ , \text{ om } x \geq 0 \\ f(-x), \ x < 0 \end{cases}$, dvs för positiva x ser funktionen ut som förr och för negativa x fås grafen genom att spegla grafen för positiva x i y-axeln.

$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x)\ , & \text{om } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{om } f(x) < 0 \end{cases}$, dvs kurvan fås genom att den del som ligger under x-axeln speglas i x-axeln. Vi får följande bilder.





3.12. Endast funktionen i figur b) är injektiv.

3.13. a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$ b) $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{2}x + 6$ c) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln x\ ,\ x > 0$

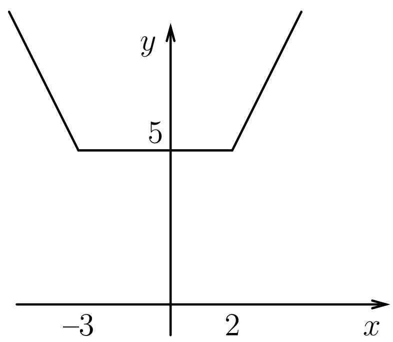
d) $f^{-1}(x) = e^{x/3}$ e) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{x+1}\ ,\ x \neq -1$ f) $f^{-1}(x)$ saknas

g) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ h) $f^{-1}(x) = x^2 + 1\ ,\ x \geq 0$

3.14. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{e^{x/2} - 1}{3}}\ ,\ x \geq 0.$

3.15. a) $g(0) = 2$ b) $g(3) = 4$ c) $g(f(2)) = 2$ d) $f(g(3)) = 3$

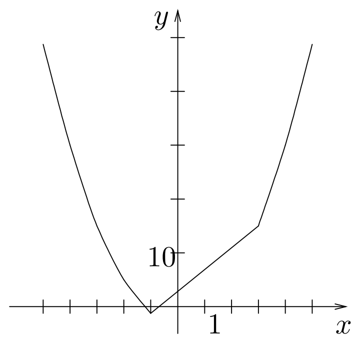
3.16. $V_f = \{y \in \mathbf{R} : y \neq 0\}$. Obegränsad, ej monoton men injektiv.
$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 2,\ x \neq 0.$



3.17. a) Nej b) Nej c) Nej d) Ja

3.18. a) injektiv
b) monoton, injektiv, nedåt begränsad
c) monoton, injektiv, uppåt begränsad, nedåt begränsad, begränsad
d) monoton, injektiv, uppåt begränsad.

3.19. Minsta värde är -1, största värde saknas (observera att i figuren till höger är det olika skala på x- och y-axel).



3.20. $f(g(x)) = 3\left(4x^2\right)^2 - 7 = 48x^4 - 7$, $g(f(x)) = 4\left(3x^2 - 7\right)^2 = 36x^4 - 168x^2 + 196$
$f(g(x)) \neq g(f(x))$

3.21. $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$, $x \in \mathbf{R}$ $\qquad f \circ g(x) = 2x^2 + 1$, $x \in \mathbf{R}$

$g \circ f(x) = (2x+1)^2$, $x \in \mathbf{R}$ $\quad f^{-1} \circ g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2}$, $x \in \mathbf{R}$.

3.22. a) jämn b) udda c) varken eller d) jämn e) varken eller

3.23. 64 , 512 , 2 , e respektive 1.

3.25. $\ln 2 < \pi/2 < \sqrt{e} < \sqrt[3]{6}$.

3.26. Räknelagarna i uppgifterna a, b, d, g, i och j är sanna, de övriga är falska.

3.27. $\ln 2^3 = \ln 16 - \ln 2 = \ln 8 = \ln 2 + \ln 4 = -\ln(1/8) = 3\ln 2 = \ln 8 + \ln 1$.

3.28. $x = 3/2$

3.29. $x = -3$.

3.30. $t = \dfrac{\ln 2}{3}$.

3.31. a) $x = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{e}} - \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ b) $x = -\dfrac{\ln 4}{\ln 3}$.

3.32. $\ln x - x/2$.

3.34. a) $x = a\sin\alpha$ b) $x = a\tan\alpha$ c) $x = a/\tan\alpha$

d) $x = a\cos\alpha$ e) $x = a/\cos\alpha$ f) $x = a/\sin\alpha$.

3.35. $\dfrac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$ resp $-\dfrac{4 + 3\sqrt{3}}{10}$.

3.36. $A = \sqrt{34}$, $\tan\delta = -3/5$. δ ligger i andra kvadranten.

3.37. $C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(\alpha - \beta)}$
γ väljs så att $\sin\gamma = \dfrac{A\sin\alpha + B\sin\beta}{C}$, $\cos\gamma = \dfrac{A\cos\alpha + B\cos\beta}{C}$

3.38. 1.

3.39. $\cos 2\theta$.

3.40. a) $x = k\dfrac{2\pi}{3}$ eller $x = \dfrac{\pi}{5} + k\dfrac{2\pi}{5}$ där k är heltal

b) $x = k\dfrac{\pi}{2}$ eller $x = k\dfrac{\pi}{3}$ där k är heltal

c) $x = k\pi$ där k är heltal.

3.41. $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3}$ eller $x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}$ där k är heltal.

3.42. $u(t) = \dfrac{1}{2}A\mu\cos(\omega_0 - \omega_m)t + A\cos(\omega_0 t) + \dfrac{1}{2}A\mu\cos(\omega_0 + \omega_m)t$.

3.43. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

3.44. Vinklarna är $\pi/6$, $\pi/4$ resp $7\pi/12$ och sidorna är 1 , $\sqrt{2}$ resp $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

3.45. Q:s avstånd till O är $r\cos\alpha + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}$.

3.46. Se boken.

3.47. a) $\arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$, $\arccos x = 0$ b) $\arcsin x = -\dfrac{\pi}{2}$, $\arccos x = \pi$

c) $\arcsin x = -\dfrac{\pi}{3}$, $\arccos x = \dfrac{5\pi}{6}$ d) $\arcsin x$ och $\arccos x$ ej definierade

e) $\arcsin x = \dfrac{\pi}{6}$, $\arccos x = \dfrac{\pi}{3}$ f) $\arcsin x = 0$, $\arccos x = \dfrac{\pi}{2}$

g) $\arcsin x = -\dfrac{\pi}{4}$, $\arccos x = \dfrac{3\pi}{4}$

3.48. a) $\arctan x = \dfrac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{4}$ b) $\arctan x = -\dfrac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccot} x = \dfrac{3\pi}{4}$

c) $\arctan x = -\dfrac{\pi}{3}$, $\operatorname{arccot} x = \dfrac{5\pi}{6}$ d) $\arctan x = 0$, $\operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$

e) $\arctan x = \dfrac{\pi}{6}$, $\operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{3}$

3.49. a) $x = 3$ b) $x = 1/2$ c) $x = -7/4$

d) $x = 2$ eller $x = 3$ e) lösning saknas f) lösning saknas

3.50. $\dfrac{\pi}{6}$

3.51. a) $\dfrac{1}{2}$ b) odefinierat c) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ d) $\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}$ e) $\sqrt{15}$

3.52. a) $0 \le x \le \pi$ b) $-1 \le x \le 1$ c) $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

3.53. Ekvationen är lösbar för $0 \leq a \leq 1$, och då blir $x = \sqrt{1-a^2}$.

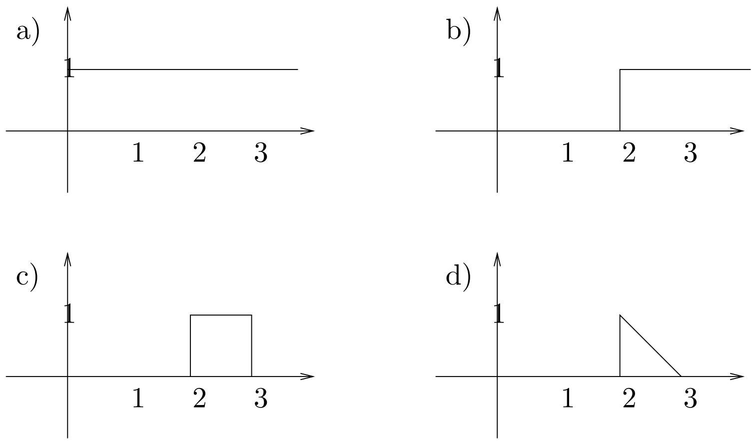
3.54. a) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ b) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}$.

3.55. a) $\dfrac{3\pi}{4}$ b) π c) $\pi + \arctan\dfrac{3}{5}$.

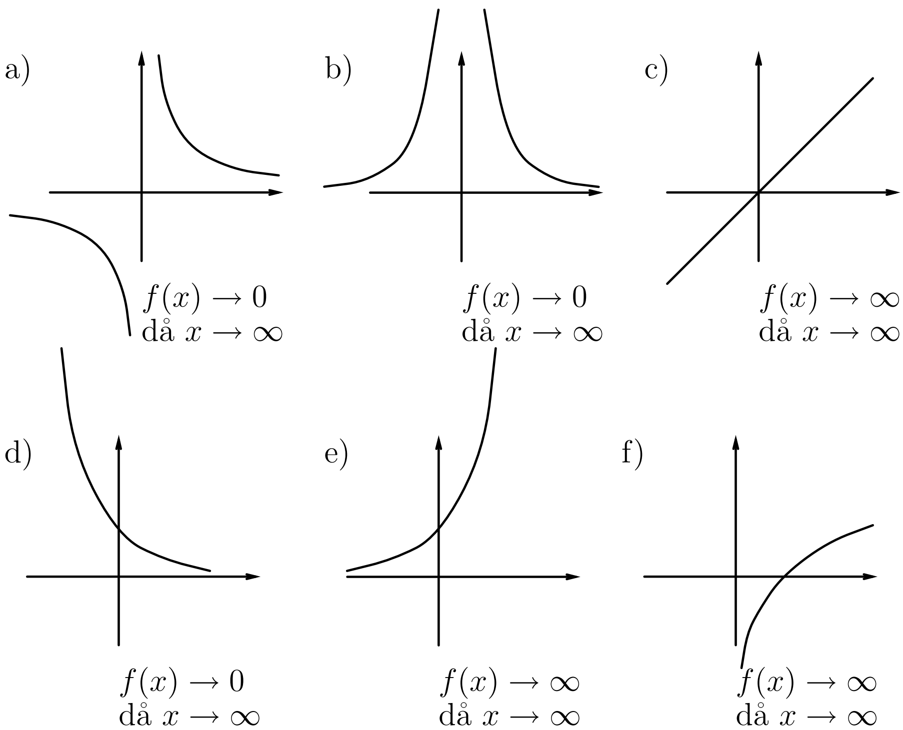
3.56. $\pi/2$

3.58. $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$

3.59.



4.1.



4.2. a) 0 b) $\pi/2$ c) $-\pi/2$ d) $-\infty$ så egentligt gränsvärde saknas.

4.3. a) 0 b) 1/3 c) 0 d) ∞ (dvs egentligt gränsvärde saknas)

4.4. Låt $P(x)$ ha högstagradsterm $a_n x^n$ och $Q(x)$ ha högstagradsterm $b_m x^m$. Då fås

a) egentligt gränsvärde saknas (∞ om a_n och b_m har samma tecken, annars $-\infty$)

b) $\dfrac{a_n}{b_m}$ (här är för övrigt $n = m$)

c) 0

4.5. a) 1/2 b) $2/\sqrt{3}$ c) -2

4.6. a) gränsvärde saknas b) gränsvärde saknas c) 0 d) 0

4.7. a) 1/3 b) 1/2 c) 1 d) 1.

4.8. $A = 1,\ B = 1/2$.

4.9. a) Existerar inte b) 0 c) 1/2.

4.10. 1/2.

4.11. a) ∞ (d v s egentligt gränsvärde saknas) b) 0 c) 0.

4.12. a) Tre stycken. b) 20 sekunder + den tid det tog att skära genom glassen.

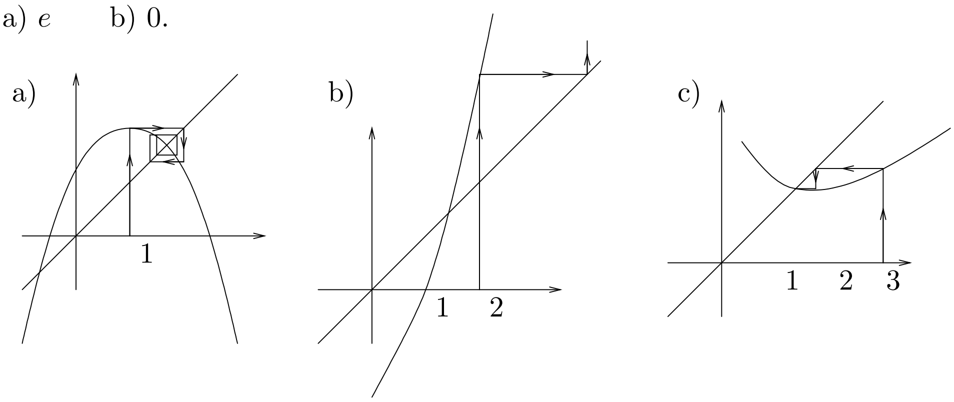
4.13. Nej.

4.14. Ja.

4.15. 2.

4.16. a) e b) 0.

4.18.



4.19. 3.

4.21. Endast alternativ b fungerar.

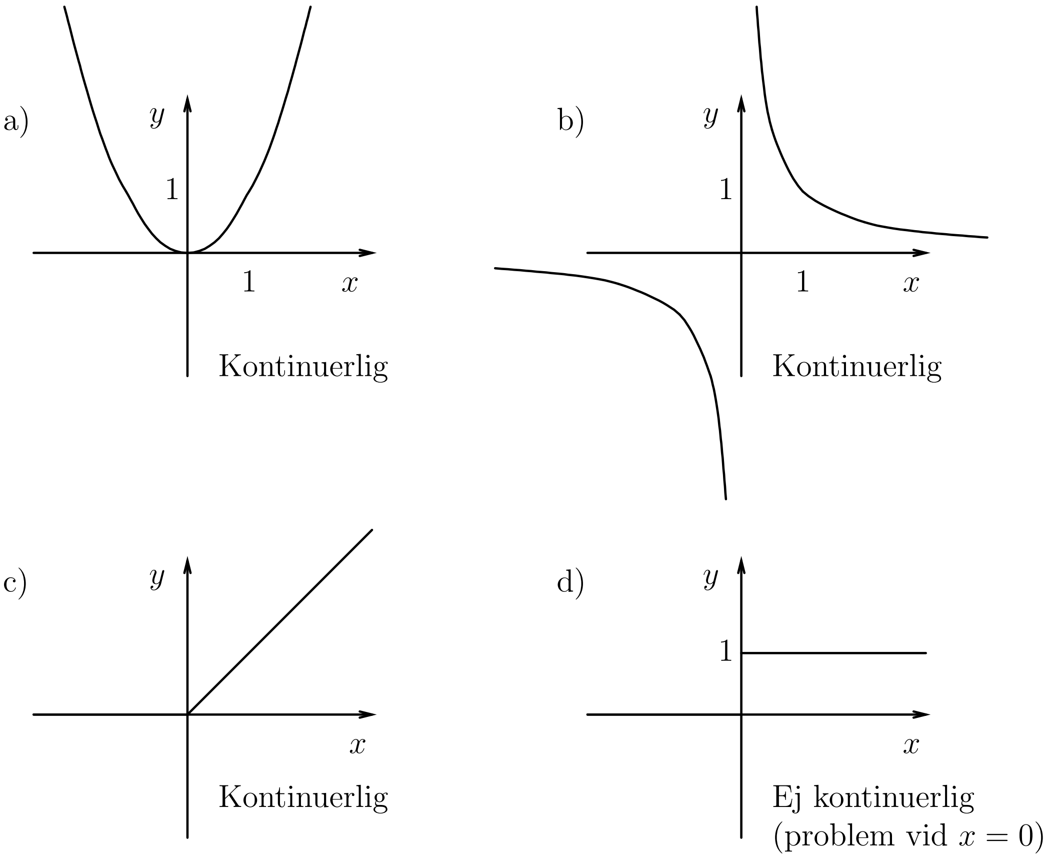
4.22. $[1.404, 1.405]$.

4.23. a) 5 b) 1 c) 3 d) -2 e) -1

f) $-1/2$ g) saknas h) 1/6 i) $-1/4$

4.24. a) $5/3$ b) m/n.

4.25.



4.26. f är kontinuerlig ($f(x) \to 2 = f(1)$ då $x \to 1$)

4.27. $k = 4$ (ty då blir $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$)

4.28. f är kontinuerlig (ty $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4 = f(2)$.)

4.29. Om $A = -\dfrac{4}{\pi}$ och $B = 3$ så blir f kontinuerlig.

4.30. Ja, om man sätter $f(1) = 0$.

4.34. Nej, inte nödvändigtvis, ty funktionen är inte kontinuerlig mellan -1 och 1.

4.36. a) ∞ (egentligt gränsvärde saknas) b) 0 c) 3 d) 1

4.37. a) 1 b) 4.

4.38. a) 0 b) 0

4.39. a) 1 b) e c) 1 d) 0.

4.40. $\dfrac{e^x - 1}{x} = \dfrac{y}{\ln(1+y)}$.

4.41. a) 4 b) 1 c) 0 d) 0 e) 2 f) 1.

4.42. a) $-\dfrac{1}{2}$ b) –1 c) 1 d) 1/4 e) $\dfrac{1}{2}$ f) 1.

4.43. a) $x = \pm 2$ är lodräta asymptoter, $y = x + 5$ är sned asymptot då $x \to \pm\infty$.

b) $x = 2$ är lodrät asymptot, $y = x + 3$ är sned asymptot då $x \to \pm\infty$.

c) $y = 1$ är vågrät asymptot då $x \to \pm\infty$.

d) $x = 1$ och $x = -3$ är lodräta asymptoter.

e) $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$ är vågrät asymptot då $x \to \pm\infty$ (tecknen hör ihop).

f) $y = x + \dfrac{1}{2}$ är sned asymptot då $x \to \infty$.

5.1. a) Bilens temperatur är 5 grader vid startögonblicket.

b) Vid startögonblicket ökar temperaturen (momentant) med 2 grader per minut.

c) Efter 20 minuter ändras ej temperaturen (momentant).

d) Efter 20 minuter är temperaturen 18 grader.

5.2. a) $y'(t) = -ky(t)$ där $y(t)$ är mängden plutonium vid tiden t (k är en positiv konstant).

b) $u(t) = L\,\dfrac{di(t)}{dt}$, där $u(t)$ är spänningen och $i(t)$ är strömmen vid tiden t. L är en konstant (spolens induktans).

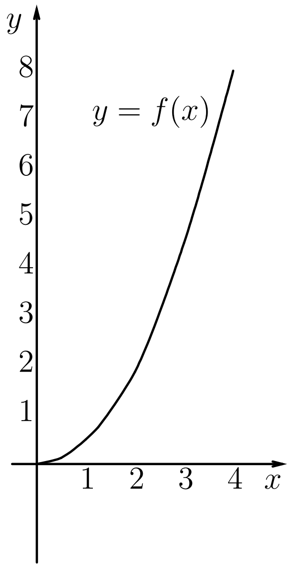
c) $i(t) = C\,\dfrac{du(t)}{dt}$, där $u(t)$ är spänningen och $i(t)$ är strömmen vid tiden t. C är en konstant (kondensatorns kapacitans).

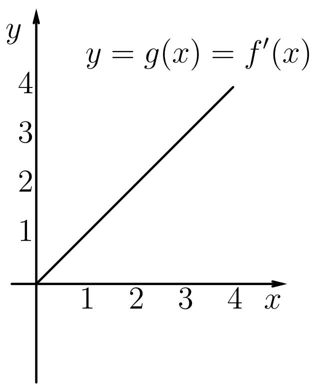
d) $T'(t) = -k\,(T(t) - T_o(t))$ där $T(t)$ är kroppens temperatur och $T_o(t)$ är omgivningens temperatur vid tiden t (k är en positiv konstant).

e) $a(t) = v'(t)$ där $a(t)$ är accelerationen och $v(t)$ är hastigheten vid tiden t.

5.3. $$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{y(t)}{20} \\[2ex] y(0) = 15. \end{cases}$$

5.4.





5.5. $f'(0) = 0$, $f'(1) = 1$ och $f'(x) = x$.

5.6. a) $f(2) = 4$ b) $f'(2) = 2$ c) $y = 4 + 2(x - 2)$.

5.7. a) $f'(x) = 1$ b) $f'(x) = 3x^2$ c) $f'(x) = 3x^2 + 1$

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ f) $f'(x) = 2ax + b$

5.8. Tangent: $y = 3x - 1$. Normal: $y = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{7}{3}$.

5.9. a) $2x + 2$ b) $3x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ c) $-\dfrac{2}{x^3}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

e) $2x - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{10}{x^6}$ f) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ g) $\dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$ h) $10(2x-1)^4$

i) $-30x(x+1)^9(2-x)^{19}$ j) $11(1-3x^2)(x-x^3)^{10}$ k) $-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ l) $\dfrac{1}{x^3(1+\frac{1}{x^2})^{3/2}}$

m) $\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}})\right)$

5.10. a) $2e^{2x}$ b) $-\dfrac{1}{2}e^{-x}$ c) $\dfrac{2}{x}$ d) $\dfrac{1}{4x}$ e) $3e^{3x} - \dfrac{3}{x}$ f) $\dfrac{1}{x}$

5.11. a) $2x\ln x + x$ b) $(1+2x)e^{2x}$ c) $e^{3x}\left(\dfrac{1}{x} + 3\ln x\right)$

d) $4x\ln|x| + \dfrac{2x^2+4}{x}$ e) $(9x^2+9x+1)e^{3x}$ f) $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)e^{x/2}$

g) $2xe^{x^2}$ h) $\dfrac{2}{x^2}e^{-2/x}$ i) $(1+\ln x)x^x$

j) $x^{(x^x)}\left(x^{x-1} + \ln x\,(1+\ln x)x^x\right)$ k) 0

5.12. a) $\dfrac{2}{1-x^2}$ b) $\dfrac{2x}{1+x^2}$ c) $\dfrac{2}{2x-5}$ d) $\dfrac{3(\ln x)^2}{x}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

f) $\dfrac{1}{x(1+x^2)}$ g) $\dfrac{1}{x\ln|x|}$ h) $\ln|x|$ i) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \coth x$

5.13. a) $A\omega\cos(\omega x+\delta)$ b) $\tan^2 x$ c) $-e^{-x}(\cos x+\sin x) = \sqrt{2}e^{-x}\sin(x-3\pi/4)$

d) $-\sin x e^{\cos x}$ e) $3(\tan^2 x + \tan^4 x)$ f) $\dfrac{1}{\sin x}$ g) $\cot x$.

5.14. a) $\dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$ b) $-\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$ c) $\dfrac{8}{4+x^2}$

d) $\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$ e) $-\dfrac{4}{x^2+16}$ f) $\dfrac{2\arctan x}{1+x^2}$

g) $\arcsin x$ h) $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ i) $(1+i)e^{(1+i)x}$.

5.15. a) 1/5 b) $-\dfrac{4}{3}\cos 1$.

5.16. f är kontinuerlig, men ej deriverbar för $x=1$.

5.17. Funktionen är kontinuerlig i varje punkt och deriverbar utom i $x=\pm 1$.
$$f'(x) = \begin{cases} 4x & \text{om } |x|>1 \\ 0 & \text{om } |x|<1 \end{cases}. \quad f'_+(1)=4,\ f'_-(1)=0,\ f'_+(-1)=0,\ f'_-(-1)=-4.$$

5.18. $a=1$ och $b=-1/2$.

5.19. Derivatan är 6.

5.20. 1/81.

5.21. a) f är strängt avtagande. b) $D_g = V_f = [-25,7]$, $V_g = D_f = [0,4]$ c) $-\dfrac{1}{9}$

5.22. b) $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

5.23. $-\dfrac{\pi^2}{4}$

5.24. 1/3.

5.25. $I = \dfrac{U}{2R}$.

5.26. a) Lokala extrempunkter saknas (terrasspunkt vid $x = 1$)
b) Lokalt minimum för $x = 2$ (även globalt minimum)
c) Lokalt minimum för $x = 0$ (även globalt minimum)
d) Lokalt (och globalt) maximum för $x = 1$, lokalt (och globalt) minimum för $x = -1$.

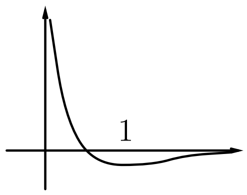
5.27. a) Lokalt max i (3,4), lokala min i (1,2) och (5,2).
b) Lokala min i $(\pm\sqrt{3}, 0)$ och (0,0), lokala max i $(\pm 1, 2)$.

5.28. a) $f_{\text{max}} = 1,\ f_{\text{min}} = -3$ b) $f_{\text{max}} = 1,\ f_{\text{min}} = -1$

c) $f_{\text{max}} = 24,\ f_{\text{min}} = -3$ d) $f_{\text{max}} = \pi,\ f_{\text{min}} = -\pi$

5.29. Minsta värde är 1 och största värde saknas.

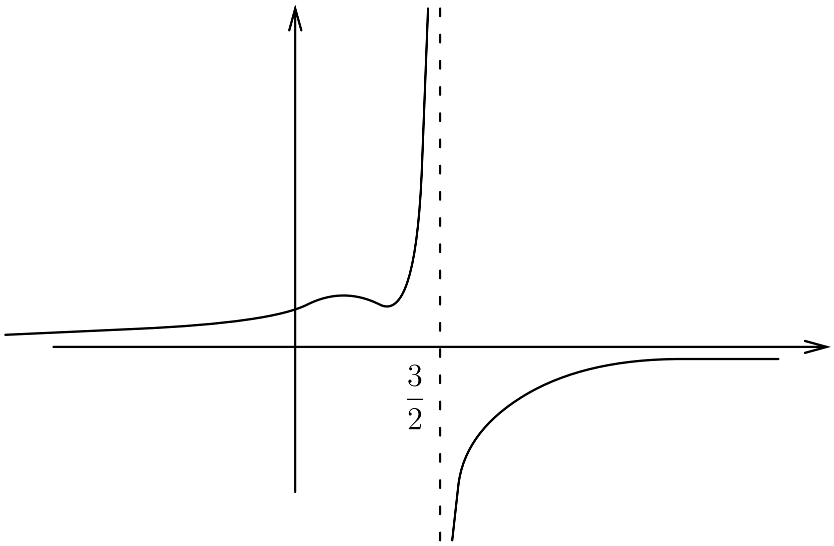
5.30.



f har asymptoter $x = 0$ och $y = 0$ samt lokalt minimum för $x = 1$.

5.31. a) Lokalt max och största värde för $x = 3$, $f_{\text{max}} = (3/e)^3$. Vågrät asymptot $y = 0$ då $x \to \infty$.
b) Lok max för $x = 4$, lok min och minsta värde för $x = 0$. $f_{\text{min}} = 0$, f_{max} saknas. Vågrät asymptot $y = 0$ då $x \to \infty$.
c) Lokalt minimum och minsta värde för $x = e$. $f \to \infty$ då $x \to \infty$, ingen asymptot. $f_{\text{min}} = -e$, $f \to 0$ då $x \to 0$.
d) Lokalt max för $x = 0$, lokalt min saknas. f_{max} saknas. Lodrät asymptot för $x = 1$ Vågrät asymptot $y = 1 + \pi$ då $x \to \infty$ samt $y = 1 - \pi$ då $x \to -\infty$.

5.32.



5.33. Funktionen är monoton och strängt monoton

5.37. Två stycken.

5.38. Lokalt max i $x = -1$, lokalt min i $x = 1$. Asymptoter $y = x - 1 - \pi$ då $x \to \infty$, $y = x - 1 + \pi$ då $x \to -\infty$. Ekvationen har en reell rot.

5.39. Två stycken.

5.40. $f_{\max} = \dfrac{3 + \sqrt{10}}{2}$, $f_{\min} = \dfrac{3 - \sqrt{10}}{2}$.

5.41. Lokalt minimum och minsta värde för $x = -2$, $f(-2) = 1$.
Lokalt minimum för $x = 1$ och lokalt maximum för $x = 0$. $f(0) = 5$, $f(1) = 4$.

5.42. $y = 0$ är asymptot då $x \to \infty$ och $(e^{3/2}, e^{9/4})$ är lokal maximipunkt.

5.43. Funktionen är definierad för $x \leq 0$ och för $x > 1$.
$\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ är lokal minimipunkt och (0,0) är lokal maximipunkt.
$y = x + \dfrac{1}{2}$ är asymptot då $x \to \pm\infty$ och $x = 1$ är asymptot då $x \to 1_+$.

5.44. a) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{x^n}$ b) $f^{(n)}(x) = (-3)^n \, e^{-3x}$

c) $f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^n \dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}} & , \quad n \geq 2 \\ 1 + \ln x & , \quad n = 1 \end{cases}$ d) $f^{(n)}(x) = \sin(x + \dfrac{n\pi}{2})$

e) $e^x \left(x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\right)$.

5.45. $h''(x) = f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x)$.

5.48. Ja.

5.50. $1+\dfrac{\pi}{4}$.

5.51.

$a<-8$	-8	$-8<a<0$	0	$0<a<11$	11	$11<a<19$	19	$a>19$
1	2	3	4	5	4	3	2	1

5.52. En lösning (nämligen $x=0$).

5.53. Alla $x\neq 0$.

5.54. $[e^{-1/e},\infty[$. Två gånger om $e^{-1/e}<y<1$, annars en gång.

5.58. Lokalt max för $x=1/2$, lokalt min för $x=1/e$, minsta värde $-1/e+1/e^2$ för $x=1/e$, största värde saknas.

5.59. Två stycken.

5.60. $a\geq\dfrac{1}{3}$.

5.61. 2.

5.62. $0<a<1$.

5.63. $(x,y)=(2,2\sqrt{2})$

5.64. Maximal volym är 32 dm^3 (vilket fås vid höjd 2 dm och basens sida 4 dm)

5.65. Alla värden i $[0,2\arctan\sqrt{2}-\pi/2]$.

5.66. Maximal produkt är 100 (då båda talen är 10).

5.67. Maximal volym är $\sqrt{2}$ dm^3 (fås då höjden är $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ dm och basens sida $\sqrt{2}$ dm).

5.68. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5.69. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

5.70. Rakt mot en punkt belägen $24-\sqrt{2}$ km norr om A.

5.71. $A_{\min}=A(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}})=\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{\dfrac{5}{4}}$, $A_{\max}$ saknas.

5.72. Mot en punkt 4.5 km norr om P.

5.73. $R\sqrt{2}$.

5.74. $A_{\max}=2ab$ och $\dfrac{A_{\max}}{A_{\text{ellips}}}=\dfrac{2}{\pi}$

5.75. $2\arccos\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

5.76. Låt B' vara spegelbilden av B i linjen L. Då fås punkten P som skärningen mellan linjen L och sträckan AB'.

5.77. Arean är 2 a.e. och då är rektangeln en kvadrat.

5.78. 4/9.

5.79. $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.

5.80. $\dfrac{4\pi}{\sqrt{6}}$ ($\approx 294°$)

5.81. 3/2 m/s.

5.82. a) $\dfrac{320}{9\pi} \approx 11$ dm/min b) $\dfrac{4}{45\pi} \approx 0.028$ dm/min.

5.83. a) 1 cm/s från linsen b) 100 cm/s mot linsen.

5.84. $\left(2^{2/3} + 3^{2/3}\right)^{3/2}$.

5.85. $\varphi = \arccos\sqrt{\dfrac{n^2-1}{3}}$.

5.86. Vik så att Q hamnar 15 cm från A.

5.88. Se boken.

5.89. -0.3473.

6.1. a) $\dfrac{4x^3}{3} + \dfrac{x^2}{4} + C$ b) $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3x^2}{2} - x + C$

c) $-\dfrac{1}{x} + C$ d) $\ln|x| - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2x^2} + C$

e) $\dfrac{x^{e+1}}{e+1} + C$ f) $\dfrac{\ln|x|}{5} + C$

g) $\dfrac{x^2}{2} + x + C$ h) $\dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + 2\sqrt{x} + C$

i) $\dfrac{2}{5}x^{5/2} + C$ j) $-\dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{8}{3}x^{-3/4} + C$

k) $\dfrac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C = \dfrac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \dfrac{4}{15}(x+1)^{5/2} + C$.

6.2. a) $\dfrac{\sin 2x}{2} + C$ b) $-\dfrac{\cos 5x}{5} + C$ c) $2\sin\dfrac{x}{2} + C$ d) $-3\cos\dfrac{x}{3} + C$

e) $\ln|1+x| + C$ f) $-\dfrac{\ln|1-2x|}{2} + C$ g) $-\dfrac{e^{-2x}}{2} + C$ h) $-3e^{-x/3} + C$

6.3. a) Nix b) Kravet blir att $g''(x) = 0$, d v s att $g(x) = cx + d$.

6.4. a) $2\tan x + C$ b) $7\arctan x + C$ c) $\dfrac{\arcsin x}{2} + C$

6.5. a) $-(x+1)e^{-x} + C$ b) $\dfrac{x}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x + C$ c) $\sin x - x\cos x + C$

d) $e^{4x}\left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{16}\right) + C$ e) $\dfrac{x^2}{2}\ln|x| - \dfrac{x^2}{4} + C$ f) $(x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C$

g) $\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right)e^{2x} + C$ h) $x\ln x + (\ln 2 - 1)x + C$

6.6. a) $x\ln|x| - x + C$ b) $\dfrac{1}{2}(1+x^2)\arctan x - \dfrac{x}{2} + C$

c) $x\ln|x| + (x+1)\ln|x+1| - 2x + C$ d) $-\dfrac{1}{x+2} + C.$

6.7. a) $\dfrac{1}{8}\left(x^3+1\right)^8 + C$ b) $\dfrac{1}{20}(1+2x^2)^5 + C$ c) $2e^{x^2} + C$ d) $-e^{\cos x} + C$

6.8. a) $\dfrac{1}{4}\ln(1+x^4) + C$ b) $-\ln|\cos x| + C$

c) $\dfrac{1}{3}\ln(1+e^{3x}) + C$ d) $\begin{cases} \dfrac{1}{n}\ln|1+x^n| + C\ ,\ n \neq 0 \\ \\ \dfrac{1}{2}\ln|x|\ ,\ n = 0 \end{cases}$.

6.9. a) $\dfrac{\sin^4 x}{4} + C$ b) $-\dfrac{1}{\sin x} + C$ c) $\dfrac{\left(x^4+1\right)^{3/2}}{6} + C$ d) $\dfrac{8}{3}\sqrt{x^3+2} + C$

6.10. a) $\dfrac{1}{2}\arctan 2x + C$ b) $\arcsin(x-1) + C$ c) $\arctan e^x + C.$

6.11. a) $\ln|\arcsin x| + C$ b) $\ln(x + \sqrt{x^2+4}) + C$

c) $\arcsin(e^x) + C$ d) $\dfrac{x^3\ln x}{3} - \dfrac{x^3}{9} + C$

e) $2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C$ f) $\dfrac{1}{2\cos^2 x} + C$

g) $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2} + C$ h) $\dfrac{x^2-1}{2}e^{x^2} + C.$

6.12. a) $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$ b) $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C.$

6.13. a) $\dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^x + C$ b) $\dfrac{1}{2}(x^2+1)\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{2}x^2 + C$

c) $\dfrac{x^2}{4}\left(2(\ln x)^2 - 2\ln x + 1\right) + C.$

6.14. $(2x-4)\sin\sqrt{x}+4\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+C.$

6.15. a) $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}$, A och B fås med handpåläggning

b) Samma svar som i a)

c) $\dfrac{A}{x+4}+\dfrac{B}{(x+4)^2}$, B fås med handpåläggning

d) Detta uttryck är redan partialbråksuppdelat så långt det är möjligt

e) $\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{(x+2)^2}+\dfrac{C}{(x+2)^3}+\dfrac{D}{x-3}+\dfrac{E}{(x-3)^2}$, C och E fås med handpåläggning

f) $\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}+\dfrac{C}{x-4}$, C fås med handpåläggning

6.16. a) $\dfrac{1/2}{x-1}-\dfrac{1/2}{x+1}$ b) $\dfrac{1/2}{x-1}+\dfrac{1/2}{x+1}$

c) $\dfrac{5}{(x+2)^2}+\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{3}{x+1}$ d) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$

6.17. Linnéa har förstås rätt, men varför blev det fel i Linus kalkyl?

6.18. a) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$ b) $\dfrac{x^2}{2}-3x+4\ln|x-2|+C$ c) $3\ln|x-2|-2\ln|x-3|+C.$

6.19. a) $2\ln|x+2|+\dfrac{3}{x+2}+C$ b) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+4x+8)-\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x+2}{2}+C$

c) $\dfrac{1}{8}\ln|x^2-4|-\dfrac{1}{4}\ln|x|+C.$

6.20. a) $3\ln|x-1|-3\ln|x+2|++2\ln|x-3|+C$

b) $\dfrac{5}{3}\ln|x-1|-\dfrac{4}{3}\ln|x+1|+\dfrac{10}{3}\ln|x-2|-\dfrac{11}{3}\ln|x+2|+C.$

6.21. a) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|-\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{x^2-1}+C$ b) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x}{2x+1}\right|-\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln|x|}{2x+1}+C$

c) $-\dfrac{\ln(x^2+2x+2)}{x}+\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\arctan(x+1)+C$

6.22. a) $\ln\left|\dfrac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C$ b) $-\ln|\cos x|+C$

c) $\sin x-\dfrac{2}{3}\sin^3 x+\dfrac{1}{5}\sin^5 x+C=\dfrac{1}{80}\sin 5x+\dfrac{5}{48}\sin 3x+\dfrac{5}{8}\sin x+C$

d) $-\dfrac{1}{4}\cos x\sin^3 x-\dfrac{3}{8}\cos x\sin x+\dfrac{3}{8}x+C=\dfrac{1}{32}\sin 4x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{3}{8}x+C$

6.23. a) $\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$ b) $\tan x+C$ c) $\dfrac{\sin 2x}{4}-\dfrac{x}{4}-\dfrac{\sin 4x}{16}+C.$

6.24. a) $2\sin x+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}\right|+C$ b) $\dfrac{8}{3}\arctan\left(\dfrac{4+5\tan\frac{x}{2}}{3}\right)+C$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln|\tan(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{8})|+C.$

6.25. a) $-x-4\sqrt{x-2}-4\ln|\sqrt{x-2}-1|+C$ b) $2\sqrt{x-1}-4\arctan\dfrac{\sqrt{x-1}}{2}+C$

c) $2\sqrt{x-1}+\ln\left|\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}+1}\right|$

6.26. a) $\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+C$ b) $\arcsin\dfrac{x}{a}+C$

c) Inte i uppgift a), men i uppgift b) blir svaret $-\arcsin\dfrac{x}{a}+C$

6.27. a) $\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C$

b) $\sqrt{x^2+2x+2}-\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C.$

6.28. $\dfrac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2}+C.$

6.29. $f(x)=\dfrac{2x+1}{2(x+1)^2}+\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right).$

7.1. 9.

7.2. a) $\int_0^1\Phi_5(x)\,dx=0.4$, $\int_0^1\Psi_5(x)\,dx=0.6$

b) $\int_0^1\Phi_{10}(x)\,dx=0.45$, $\int_0^1\Psi_{10}(x)\,dx=0.55$

c) $\int_0^1\Phi_n(x)\,dx=0.5-\dfrac{1}{2n}$, $\int_0^1\Psi_n(x)\,dx=0.5+\dfrac{1}{2n}$

d) $\int_0^1 x\,dx=0.5.$

7.3. $e-1.$

7.5. $f(0).$

7.6. $\pi/2.$

7.7. $e^{-x^2}.$

7.8. $\dfrac{\sin x}{x}$

7.9. $\dfrac{x}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$.

7.10. $x = \pi/2$.

7.11. Det enda som skett från vänsterledet till högerledet är att man flyttat såväl funktion som område "k enheter åt höger" (om $k > 0$, annars har förflyttningen skett åt vänster. Rita en figur så ser du.

7.12. a) $7/3$ b) $16/3$ c) $-\ln 3$ d) $-8/3$ e) $2/9$

f) $4\left(e^{1/4}-1\right)$ g) $1/2$ h) $5\pi/6$ i) $\pi/4$

7.13. a) $\dfrac{\pi}{2}-1$ b) $\dfrac{8}{3}\ln 2-\dfrac{7}{9}$ c) 1 d) $\ln 2$ e) $\dfrac{256}{3}$ f) $\dfrac{1}{3}$ g) 2 h) $\dfrac{8}{5}$

7.14. a) $3\ln 2-\ln 3$ b) $\ln 2-1/2$ c) $e\ln(1+e^2)-2e+2\arctan e-\ln 2+2-\pi/2$

d) $e-2$ e) $1/5$ f) $1/2$.

7.15. a) 2 b) $3\pi^2-12$ c) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}-\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{\ln 2}{2}$ e) $2e+3\ln 3-8$ f) $\pi+2$

7.16. a) 0 b) 0 c) $\dfrac{\pi^2}{4}-2$.

7.17. $-\dfrac{1}{12}$.

7.18. $\displaystyle\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4$

7.19. $\displaystyle\int_0^2 \left(2x^3-x^4\right)\,dx = \frac{8}{5}$

7.20. $\displaystyle\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = \frac{1}{12}$.

7.21. $\displaystyle\int_0^1 \left(2x-\frac{x}{8}\right)\,dx + \int_1^4 \left(\frac{2}{x}-\frac{x}{8}\right)\,dx = 4\ln 2$

7.22. $\displaystyle\int_{-1}^4 |4x-x^2|\,dx = \int_{-1}^0 (x^2-4x)\,dx + \int_0^4 (4x-x^2)\,dx = 13$

7.23. $\displaystyle\int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \pi ab.$

7.24. $\displaystyle\int_{1}^{e^\pi} \cos(\ln x)\,dx = -\frac{e^\pi+1}{2}.$

7.25. $\displaystyle\pi\int_{0}^{4} 25x^2\,dx = \frac{1600\pi}{3}.$

7.26. $\displaystyle\pi\int_{0}^{1} \frac{x}{(x+1)^2}\,dx = \pi\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right).$

7.27. $\displaystyle\pi\int_{0}^{4} (2-\sqrt{x})^2\,dx = \frac{8\pi}{3}.$

7.28. $\displaystyle\pi\int_{0}^{4} x^2(4-x)\,dx = \frac{64\pi}{3}.$

7.29. $\displaystyle V = \pi\int_{0}^{\pi/4} (\cos x+\sin x)^2\,dx = \frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}.$

7.30. $\displaystyle\pi\int_{0}^{h} \left(R-\frac{R}{h}x\right)^2\,dx = \frac{\pi R^2 h}{3}.$

7.31. $\displaystyle\pi\int_{0}^{1} x^2 e^{-2x}\,dx = \frac{\pi}{4}(1-5e^{-2}).$

7.32. $\displaystyle\pi\int_{d}^{R} (R^2-x^2)\,dx = \frac{\pi}{3}(2R^3-3dR^2+d^3)$ respektive

$$\pi\int_{-R}^{d} (R^2-x^2)\,dx = \frac{\pi}{3}(2R^3+3dR^2-d^3).$$

7.33. $\displaystyle\int_{0}^{r} 2\sqrt{r^2-x^2}\,\frac{h}{r}\,x\,dx = \frac{2hr^2}{3}.$

7.34. $\displaystyle\pi\int_{-a}^{a} b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{4\pi ab^2}{3}.$

7.35. $\pi \int_0^4 y\,dy = 2\pi \int_0^2 x(4-x^2)\,dx = 8\pi.$

7.36. $2\pi \int_1^e x\ln x\,dx = \frac{\pi}{2}\left(e^2+1\right).$

7.37. $\int_0^1 2\pi x(e^{-x^2} - \frac{1}{e})\,dx = \int_{1/e}^1 \pi(-\ln y)\,dy = \pi(1-\frac{2}{e}).$

7.38. $\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} x^2\,dy = \pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin y} - 1\right)\,dy = \pi\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\pi^2}{3}.$

7.39. $\pi \int_0^{10} \left(\frac{1}{e} - xe^{-x}\right)\,dx = \pi\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{e} + \frac{10}{e^2} + \frac{22}{e^{11}} - \frac{221}{4e^{20}}\right).$

7.40. $\int_{-R}^R 4(R^2-z^2)\,dz = 16R^3/3.$

7.41. $\pi \int_{-2}^2 \left((3+\sqrt{4-x^2})^2 - (3-\sqrt{4-x^2})^2\right)\,dx = 24\pi^2.$

7.42. $V = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} - (1-x)\right)^2\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}\right).$

7.43. $V(\omega) = \pi \int_0^\omega \frac{dx}{(x+\sqrt{x})^2} = 2\pi\left[\ln\frac{t}{t+1} + \frac{1}{t+1}\right]_0^{\sqrt{\omega}} \to \pi(2\ln 2 - 1)$ då $\omega \to \infty$.

7.44. $\int_0^{2\pi} e^{-t}\sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}(1-e^{-2\pi}).$

7.45. $\int_1^3 \sqrt{1+(2)^2}\,dx = 2\sqrt{5}$ (vilket förstås även kan beräknas utan integraler)

7.46. $\int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{14}{3}.$

7.47. $\ln 3 - \frac{1}{2}.$

7.48. $2\int\limits_{-R}^{R} \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}} = 2\pi R.$

7.49. $\int\limits_{1}^{4} \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx = \int\limits_{2}^{4} \sqrt{1+\frac{y^2}{4}}\,dy = 2\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln(2+\sqrt{5})-\ln(1+\sqrt{2}).$

7.50. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{|\sin x|} = \frac{1}{2}\ln 3.$

7.51. $\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,dt = \frac{3}{4}.$

7.52. $\int\limits_{0}^{2\pi} e^{-\theta}\sqrt{2}\,d\theta = \sqrt{2}(1-e^{-2\pi})$ (jfr uppgift 7.26).

7.53. $\int\limits_{0}^{2\pi} R\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta = 8R.$

7.54. $24r.$

7.55. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{R^2}{2}\,d\theta = \pi R^2.$

7.56. a) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+\cos\theta)^2}{2}\,d\theta = \frac{3\pi}{2}$ b) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}\,d\theta = 8.$

7.57. $\frac{\pi L}{2} + \frac{L^2}{2R}$

7.58. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$

7.59. $V = \pi\int\limits_{0}^{1} x^6\,dx = \frac{\pi}{7}$, $A = 2\pi\int\limits_{0}^{1} x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1).$

7.60. $2\pi\int\limits_{R-h}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx = 2\pi Rh.$

7.61. $2\pi\int\limits_{0}^{h} \frac{R}{h}x\sqrt{1+\left(\frac{R}{h}\right)^2}\,dx = \pi R\sqrt{R^2+h^2}.$

7.62. På symmetriaxeln, $\dfrac{4R}{3\pi}$ längdenheter från den raka kanten.

7.63. På symmetriaxeln, $\dfrac{3R}{8}$ från den plana ytan.

7.64. $(1, \dfrac{\pi}{8})$.

7.65. $k\,\dfrac{QqL}{a(a+L)}$.

7.66. $I_e = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $I_l = \dfrac{2}{\pi}$.

7.67. $220\sqrt{3} \approx 380\ V$.

7.68. $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

7.69. a) divergent b) 3 c) 3 d) divergent e) $\dfrac{1}{3}$ f) $\dfrac{1}{3}$

g) $\dfrac{3}{2}$ h) 4 i) divergent j) 1 k) divergent l) divergent

7.70. a) $\dfrac{\pi}{4}$ b) divergent c) $\dfrac{\pi}{4}$ d) divergent e) $\dfrac{1}{4}$ f) $2\ln 2$

g) -1 h) divergent i) $\dfrac{\pi}{2}$ j) divergent k) π l) $\dfrac{\pi}{2}$.

7.71. Integralen är generaliserad i $x = 0$, och måste därför splittras som

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

Dessa båda integraler är divergenta (det räcker att en av dem är det) så därför är den ursprungliga integralen divergent.

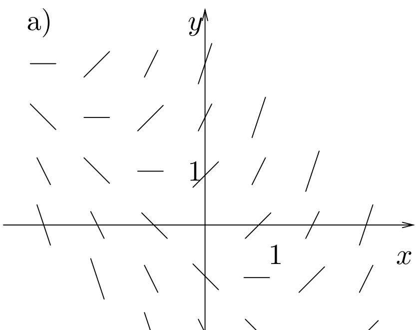
7.72. $V = \pi \displaystyle\int_0^t \frac{dx}{(2+x)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2+t} \to \frac{\pi}{2}$ då $t \to \infty$.

7.73. a) π b) ∞

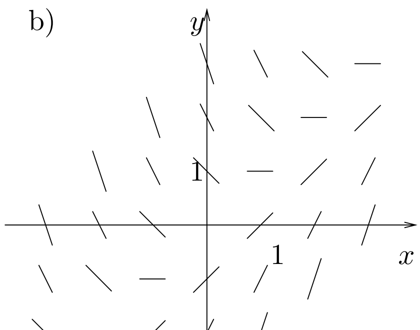
c) Det beror förstås på vad man menar med en paradox. Om man avser något som strider mot sunt förnuft, så är dock resultatet ingen paradox, eller hur.

7.74. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{|a|}$ om $a \neq 0$, annars är integralen divergent.

8.1. a)



b)



8.2. a) $y = 5x + C$ b) $y = \dfrac{5}{2}x^2 + 2x + C$ c) $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$

d) $y = \ln|x| + C$ e) $y = 3e^x + 2\sqrt{x} + C$ f) $y = 2\sqrt{x} - \dfrac{4}{3}x\sqrt{x} + C$

8.3. Allmänna lösningen blir $y = x^2 + C$. Speciellt går lösningskurvan genom punkten $(2,7)$ om $C = 3$, dvs $y = x^2 + 3$.

8.4. a) $y = 5 - 2e^{-x/2}$ b) $y = \tan x$, $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ c) $y = \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{x}$, $x > 0$

8.5. $y = 2x^2 + 3$.

8.6. Endast till ekvation b).

8.7. a) $y = Ce^{-2x}$ b) $y = Ce^{3x}$ c) $y = Ce^{-x/4}$ d) $y = Ce^{5x/2}$

8.8. $y = 4e^{2t}$.

8.9. $f(x) = 2e^{x/3}$. Speciellt blir $f(1) = 2e^{1/3}$.

8.10. $3e^{-7\ln 2/3.8} \approx 0.84$ mg. (Mängden vid tiden t är $3e^{-t\ln 2/3.8}$ mg.)

8.11. $y = \dfrac{1}{10}\ln x + \dfrac{1}{100}\,x^{-10} - \dfrac{1}{100}$.

8.12. a) $y = Cx$ b) $y = 1 + Ce^{-2x}$ c) $y = Ce^{x^2/2}$

d) $y = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{C}{x}$ e) $y = \dfrac{x}{2\sin x} - \dfrac{\cos x}{2} + \dfrac{C}{\sin x}$ f) $y = 1 + e^{-x^2/2}$

g) $y = e^{-x^2} + Ce^{-x^2-x}$ h) $y = Ce^{\arctan x}$ i) $y = -\dfrac{1+\cos x}{x}$

8.13. $(1+x^2)\left(x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + 1\right)$.

8.14. a)
$$y = \frac{1}{4}(1+x^4)\ln(1+x^4) + C(1+x^4) - \frac{x^4}{4} =$$
$$= \frac{1}{4}(1+x^4)\ln(1+x^4) + D(1+x^4) + \frac{1}{4}$$

b)
$$y = \frac{\ln x}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2}\ln\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) + C\sqrt{1-x^2}$$

c)
$$y = \frac{x+C}{\sqrt{x^2+2x}},\ x > 0.$$

8.15. $y(x) = \dfrac{x\sin x + \cos x + C}{x^2}$.

8.16. $y = 2 + e^{\pi/2 - \arctan x}$.

8.17. a) $\dfrac{2}{\sqrt{g}}$ s b) $2\sqrt{g}$ m/s.

8.18. $gt_1(t - \dfrac{t_1}{2})$ för $t \geq t_1$.

8.19. a) Om proportionalitetskonstanterna är λ_a respektive λ_b och begynnelsemängderna är A_0 resp B_0 så fås

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda_a t}\ ,\ B(t) = B_0 e^{-\lambda_b t} + \frac{\lambda_a A_0}{\lambda_a - \lambda_b}\left(e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t}\right).$$

b) Om $\lambda_b B_0 < \lambda_a A_0$.

8.20. $f(x) = \dfrac{C}{x}$.

8.21. $\dfrac{g}{\pi^2} \cdot 10^3$ kg ≈ 1 ton.

8.22. $i(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$.

8.23. a) $i(t) = \dfrac{\sin 100t - \cos 100t + e^{-100t}}{20}$

b) $i(t) = \dfrac{\sin 100t - \cos 100t}{20}$ dvs den transienta biten saknas.

8.24. a) $y = \sqrt{x^2 + C}$ eller $y = -\sqrt{x^2 + C}$, $(|x| > \sqrt{-C}$ om $C \leq 0)$.

b) $y = \dfrac{1}{C - x}\ ,\ x > C$ eller $y = \dfrac{1}{C - x}\ ,\ x < C$ eller $y = 0\ ,\ x \in \mathbf{R}$

c) $y = Cx^3 + \dfrac{1}{3}\ ,\ x \in \mathbf{R}$

d) $y = -\ln(C - e^x),\ x < \ln C\ (C > 0)$

e) $x = -\ln(C + \cos t)$ där t ligger i ett intervall sådant att $C + \cos t > 0$ $(C > -1)$

f) $y = \tan(x + C)\ ,\ x \in]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi - C, \dfrac{\pi}{2} + n\pi - C[$

8.25. $y = \sqrt{2x - 2\arctan x + 4}$.

8.26. $y(x) = \ln(1 + \arctan x)$. Funktionen är definierad då $x > -\dfrac{\pi}{4}$

8.27. a) $y = \dfrac{2x^2 - 1}{2x^2 + 1}$ b) $y = 1$ c) $y = \dfrac{x + 2}{1 - 2x},\ x < \dfrac{1}{2}$.

8.28. $x(t) = x_0 e^{kt}$.

8.29. $v(t) = \sqrt{\frac{g}{c}} \cdot \frac{E - e^{-2\sqrt{gc}t}}{E + e^{-2\sqrt{gc}t}}$, där $E = \frac{\sqrt{\frac{g}{c}} + v_0}{\sqrt{\frac{g}{c}} - v_0}$ om $v_0 \neq \sqrt{\frac{g}{c}}$. I annat fall blir

$v(t) = \sqrt{\frac{g}{c}}$. Gränshastigheten blir $\sqrt{\frac{g}{c}}$.

8.30. $y = \frac{ab(1 - e^{-k(a-b)t})}{a - be^{-k(a-b)t}}$

8.31. $\frac{3 \ln 4}{\ln 28 - \ln 13} - 3 \approx 2.8$ år

8.32. a) $y(x) = e^x$ b) $y(x) = (1 + x^2)(2 \arctan x - \frac{\pi}{2})$.

8.33. $y = \frac{e^{-\arctan x}}{1 + x^2}$.

8.34. $y = \cos x - \frac{x}{2} \sin x$.

8.35. $y = x^{1-\alpha} - x$ för $0 < \alpha \leq 1$ och $y \equiv 0$ för $\alpha = 0$.

8.37. a) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ b) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

c) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$ d) $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$

e) $y = C_1 e^{(3+i)x} + C_2 e^{(3-i)x} = e^{3x}(A \cos x + B \sin x)$

f) $y = e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$ g) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

h) $y = C_1 + C_2 e^{-6x}$ i) $y = C_1 e^{-ix} + C_2 e^{-2ix}$

8.38. a) $y = e^{-x} \sin x$ b) $y = (1 + 2x)e^{-x}$ c) $y = 2e^{-3x} + 3e^{2x}$ d) $y = 2 \sin x - \cos x$

8.39. a) $y = Ae^x + Be^{-x} - x^2 - 2$ b) $y = Ae^x + Be^{-3x} + 1 + 2x$

c) $y = -\frac{2}{27}x - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{9}x^3 + A + Be^{3x}$

8.40. a) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{27}e^{5x}$ b) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} + \frac{x}{6}e^{2x}$

c) $y = e^{-2x}(A \cos x + B \sin x) + \left(\frac{x}{10} - \frac{3}{50}\right) e^x$

8.41. a) $y = (Ax + B)e^{-2x} + 3 \cos x + 4 \sin x$ b) $y = \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x + Ae^{-x} + Be^{3x}$.

8.42. a) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \frac{1}{20}(1 - 3i)e^{2ix}$ b) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10}(\cos 2x - 2 \sin 2x)$

c) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10}(\sin x - 3 \cos x)e^{3x}$ d) $y = e^{3x}(A \cos x + B \sin x) - \frac{1}{2}x \cos x e^{3x}$

8.43. a) $y = (A - x)e^x + Be^{2x} + 2x + 3$

b) $y = \left(\dfrac{x^2}{2} + C_1 x + C_2\right) e^{3x} + \dfrac{1}{50}(4\sin x + 3\cos x)$

c) $y = e^{-x}\left(C_1 + C_2 x - \dfrac{x^2}{2}\right) + \dfrac{1}{4}e^x$

d) $y = A\cos 2x + B\sin 2x + \dfrac{2}{3}\sin x - \dfrac{1}{3}\cos x$

e) $y = A\cos x + B\sin x - \dfrac{x}{2}\cos x$

8.44. a) $y = Ae^{-2x} + (Bx + C)e^x$

b) $y = C_1 e^x + e^{-x/2}\left(A\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} + B\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \dfrac{x}{3}e^x + \dfrac{1}{2}(\cos x - \sin x)$

c) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3\cos x + C_4\sin x - \dfrac{x}{20}e^{-2x}$.

8.45. $y = 2t^2 - 1 + 3\cos 2t$.

8.46. $y = (1 + 2x)e^{2x} + e^x$.

8.47. $y = (1 - x)e^{2x} + e^x$.

8.48. $y = \dfrac{1}{6}(11e^{2x} + e^{3x})$.

8.49. $y = \left(\dfrac{t^3}{6} - \dfrac{3t}{2} + \dfrac{7}{4}\right) e^{2t} + \dfrac{1}{4}$.

8.50. $y = 10\cos 2t$. Origo passeras första gången då $t = \dfrac{\pi}{4}$ sekunder.

8.51. $y = y_0\cos(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t)$.

8.52. a) $y = \dfrac{y_0}{8}(9e^{-t} - e^{-9t})$ b) $y = \dfrac{y_0}{4}e^{-3t}(4\cos 4t + 3\sin 4t)$ c) $y = y_0(t + 1)e^{-t}$.

8.53. a) $y(t) = y_0\cos 5t + \dfrac{1}{50}\sin 5t - \dfrac{1}{10}\, t\cos 5t$ b) y blir obegränsad.

8.54. $R^2C^2 > 4LC$: $\quad i(t) = \dfrac{ELC}{\sigma}\left(e^{-\frac{RC-\sigma}{2LC}t} - e^{-\frac{RC+\sigma}{2LC}t}\right)$ där $\sigma = \sqrt{R^2C^2 - 4LC}$

$R^2C^2 = 4LC$: $\quad i(t) = Ete^{-\frac{2R}{l}t}$

$R^2C^2 < 4LC$: $\quad i(t) = \dfrac{2LCE}{\sigma}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\dfrac{\sigma}{2LC}t$ där $\sigma = \sqrt{4LC - R^2C^2}$

$t \to \infty$: $\quad i(t) \to 0$ utom då $R = 0$

$R = 0$: $\quad i(t) = E\sqrt{LC}\sin\dfrac{t}{\sqrt{LC}}$

8.55. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}(A\cos x + B\sin x)$.

8.56. $\dfrac{14R^{5/2}}{15r^2\sqrt{2g}}$ sekunder.

8.57. $h(r) = H\left(\dfrac{r}{R}\right)^{2(1-k)/k}$.

8.58. $z' + (1-\alpha)g(x)z = (1-\alpha)h(x)$

I detta specialfall blir $y = \dfrac{e^{x^2/2}}{C - (x^2-2)e^{x^2/2}}$ eller $y = 0$.

8.59. $y = Ax + Bx^2 + 2x^2\ln x$.

9.1. y_0 har samma funktionsvärde som y då $x = 0$. y_1 har dessutom samma lutning (derivata) som y och y_2 har dessutom samma andraderivata som y för $x = 0$. y_2 anpassar bättre än y_1 som i sin tur anpassar bättre än y_0 då x ligger i närheten av 0.

9.2. a) $-2x^3 - x^2 + 7x + 1$ b) $3 - 8(x-1) - 15(x-1)^2 - 4(x-1)^3$.

9.3. $1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3$.

9.4. $\dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{e}(x+1) + \dfrac{1}{2e}(x+1)^2 + \dfrac{1}{6e}(x+1)^3$.

9.5. $-1 + \dfrac{1}{2}(x-\pi)^2 - \dfrac{1}{24}(x-\pi)^4$.

9.7. a) $P_2(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ b) $P_2(x) = 1 - x + x^2$

c) $P_2(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$ d) $P_2(x) = x + x^2$

9.8. $P_5(x) = 3x - \dfrac{9}{2}x^3 + \dfrac{81}{40}x^5$.

9.9. a) $1+2x+\frac{3x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{5x^4}{24}$ b) $x^2-\frac{x^4}{6}$

c) $x+\frac{5x^3}{6}$ d) $1-x^2+x^4$.

9.10. a) $2x^2-2x^4$ b) $1+x+\frac{3x^2}{2}+\frac{5x^3}{2}+\frac{35x^4}{8}$

c) $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}$ d) $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}\right)$.

9.11. $2x^2-2x^3+2x^4$.

9.12. a) $\frac{1}{12}$ b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) -1.

9.13. a) $1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ b) 1.

9.14. $P(x)=\frac{1}{24}(x-2)^4$.

9.15. a) 0 b) $\frac{1}{6}$ c) 4 d) $\frac{1}{2}$.

9.16. $\frac{3}{8}-\frac{\ln 2}{2}$

9.17. $f'(0)=\frac{1}{2}$.

9.18. $a=1$ ger gränsvärdet $-1/2$.

9.19. Gränsvärdet existerar och är $-\frac{2}{e}$ omm $a=1$.

9.20. $a=-1/3,\ b=2/3,\ c=1/6$.

9.21. $a=1$, $b=-2$ och $c=\frac{5}{2}$.

9.22. a) $x_n=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n$ b) $\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}$.

9.23. $e^{-x^2/2}$.

9.24. $A=-\ln 9$ ger gränsvärdet $-8/9$.

9.25. $a=-1$, $b=\frac{1}{2}$ och $c=\frac{1}{8}$.

9.26. $f^{(60)}(0)=\frac{2^{29}\cdot 60!}{29!}$

10.1. a) $\frac{10}{9}\left(1-10^{-n-1}\right)$ b) $\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

c) $-\ln(n+1)!$ d) $\begin{cases} a\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & , \quad x\neq 1 \\ a(n+1) & , \quad x=1 \end{cases}$

10.2. a) Konvergent med summan 10/9 b) Konvergent med summan 1
c) Divergent d) Konvergent med summan 0
e) Divergent f) Divergent

10.3. Serierna c, e och f är konvergenta.

10.4. Serierna b, d, e och f är konvergenta

10.5. Serierna c och f är konvergenta

10.6. Båda serierna konvergerar för $\alpha > 1$ och divergerar för $\alpha \leq 1$

10.9. Serierna c, e, i och j är absolutkonvergenta.
Serierna a, d, f och g är betingat konvergenta.

10.10. a) $-2 < x < 2$ b) $-2 \leq x < 2$ c) $-1 \leq x \leq 1$
d) $-1 \leq x < 1$ e) $0 \leq x < 2$ f) $-1 \leq x \leq 1$

10.11. För $|x| \leq 1$

10.12. a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ b) $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x^{k-1}$
c) $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ d) $3/4$

10.13. $f(x) = x + (1-x)\ln(1-x)\ ,\ -1 < x < 1$

10.14. $7e - 2$

10.15. $x \arctan x - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\ ,\ |x| \leq 1$

10.16. a) $a_0 = a_1 = 1\ ,\ a_k = \dfrac{2}{k!}$ då $k \geq 2$ b) $y(x) = 2e^x - x - 1$