Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 10-11

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

4 februari 2016

Laborationer etc.

- Labb 1 och Labb-PM nu på Fronter.

Tis 9/2 Seminarium 2.

Lekt 10

- Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + 3\frac{d}{dx} + 2\right) y = e^{-x}$$

Att bestämma y_p då $h(x) = A\cos qx$ eller $h(x) = A\sin qx$

Ansats:

$$y_p = K\cos qx + L\sin qx.$$

Exempel

Bestäm den allmänna lösningen till

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\,\frac{dy}{dx} + 6\,y = 10\,\sin x. \tag{1}$$

Lösningsförslag

Homogena fallet

Vi löser den karakteristiska ekvationen

$$r^2 - 5r + 6 = 0,$$

vilket ger upphov till den homogena lösningen

$$y_h = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{2x}, \quad \text{(Kontrollera!)}$$

där C_1 resp. C_2 är godtyckliga reella konstanter.

Inhomogena fallet

Ansats: Metoden med obestämda koefficienter:
$y_p = K \cos x + L \sin x$. Den är ej uppbokad i y_h.

Inhomogena fallet

Vi deriverar ansatsen två gånger.
Därefter görs insättning i (1), vilket ger (Kontrollera!)

$$-K\cos x - L\sin x - 5(-K\sin x + L\cos x) + 6(K\cos x + L\sin x) = 10\,\sin x$$
$$\cos x(5K - 5L) + \sin x(5K + 5L) = 10\,\sin x$$

Vi får ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 5K + 5L & = & 10 \\ 5K - 5L & = & 0 \end{cases}$$

Detta system har lösningarna $K = 1, L = 1$, och därmed har ekvation (1) den allmänna lösningen

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{2x} + \cos x + \sin x.$$

Att bestämma y_p då $h(x) = \mathrm{e}^{cx} P_n(x)$– del 1.

Vi förutsätter att:

- $P_n(x)$ är ett polynom,
- c är en reell eller komplex konstant.

Fundamental tankegång: Med ansatsen

$$y = z(x)\,\mathrm{e}^{cx},$$

där $z(x)$ är en tillfällig variabel, överförs differentialekvationen till fallet med polynomhögerled.
Ansatsen kallas ibland variation av parametern (Euler och Lagrange, ca 1760).

Exempel

Bestäm den allmänna lösningen till

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = x\,\mathrm{e}^{3x} \quad . \tag{2}$$

Lösningsförslag

Homogena fallet

Vi löser den karakteristiska ekvationen $r^2 - 1 = 0$, vilket ger upphov till den homogena lösningen

$$y_h = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{-x} \quad .$$

Inhomogena fallet

Ansats: $y = z\mathrm{e}^{3x}$. Ansatsen ger efter insättning

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{3x}(z'' + 6z' + 8z) = x\,\mathrm{e}^{3x} \Leftrightarrow \\ &z'' + 6z' + 8z = x \quad . \end{aligned}$$

Observera att vi nu har fallet med polynomhögerled och vi gör partikuläransatsen $z(x) = Ax + B$, där $A, B \in \mathbb{R}$. Derivering och insättning ger:

$$6A + 8(Ax + B) = x \quad .$$

Identifiering

Vi identifierar koefficienterna i bägge led och får ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 8A &= 1 \\ 6A + 8B &= 0 \end{cases}$$

Detta system har lösningarna $A = 1/8, B = -3/32$, vilket ger partikulärlösningen $z(x) = \frac{x}{8} - \frac{3}{32}$, och därmed

$$y_p(x) = z\mathrm{e}^{3x} = (\frac{x}{8} - \frac{3}{32})\mathrm{e}^{3x} \quad .$$

Den allmänna lösningen blir slutligen

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + (\frac{x}{8} - \frac{3}{32})\mathrm{e}^{3x} \quad .$$

Att bestämma y_p då $h(x) = \mathrm{e}^{cx} P_n(x)$ – del 2.

Nu skall vi betrakta fallet då $c \in \mathbb{C}$. Vi använder komplex aritmetik.

Avslutande exempel

Bestäm den allmänna lösningen till

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\,\frac{dy}{dx} + 6\,y = 10x\,\sin x \quad . \tag{3}$$

Lösningsförslag

Homogena fallet

Vi löser den karakteristiska ekvationen

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \quad ,$$

vilket ger upphov till den homogena lösningen

$$y_h = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{2x} \quad ,$$

där C_1 resp. C_2 är godtyckliga reella konstanter.

Inhomogena fallet

Vi observerar att $\sin x = Im(\mathrm{e}^{ix})$. Den sökta lösningen är **imaginärdelen** av partikulärlösningen till

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 10x\,\mathrm{e}^{ix} \quad . \tag{4}$$

Ansats: $y = z\,\mathrm{e}^{ix}$. Vi deriverar ansatsen två gånger. Därefter görs insättning i (4), vilket ger

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{ix}\big(z'' + (-5+2i)z' + (5-5i)z\big) = 10x\,\mathrm{e}^{ix} \Leftrightarrow \\ &z'' + (-5+2i)z' + (5-5i)z = 10x \quad . \end{aligned}$$

Observera att vi nu har fallet med polynomhögerled och vi ansätter $z(x) = Ax + B$, där $A, B \in \mathbb{C}$. Derivering och insättning ger:

$$(-5+2i)A + (5-5i)(Ax+B) = 10x \quad .$$

Identifiering

Vi identifierar koefficienterna och får ekvationssystemet:

$$\begin{cases} (5-5i)A = 10 \\ (-5+2i)A + B(5-5i) = 0 \end{cases}$$

Detta system har lösningarna $A = 1 + i, B = 2/5 + i$, och därmed är $z = (1+i)x + 2/5 + i$ en partikulärlösning, och alltså

$$y_p(x) = (x + 2/5 + i(x+1))\,\mathrm{e}^{ix} \quad .$$

Ekvation (3) har därmed partikulärlösningen

$$\mathrm{Im}\,(y_p(x)) = (x+1)\cos x + (x + 2/5)\sin x \quad ,$$

och den allmänna lösningen blir till sist

$$y(x) = A\,\mathrm{e}^{x} + B\,\mathrm{e}^{2x} + (x+1)\cos x + (x+2/5)\sin x.$$

Extra: Svårare exempel

Exempel

Bestäm en partikulärlösning till

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\,\frac{dy}{dx} - 3\,y = 4e^{-x}.$$

Använd variation av parametern.

Lösningsförslag

Ansats: $y_p(x) = z(x)e^{-x}$. Derivera ansatsen med produktregeln.

$$y_p' = e^{-x}(z' - z), \quad y_p'' = e^{-x}(z'' - 2z' + z).$$

Insättning ger $z'' - 4z' = 4$, $u' - 4u = 4$, linjär och

$u = -1 + Ce^{4x}$, varav $z = -x + (C/4)e^{4x}$ efter integrering.

Speciellt är $z = -x$ en lösning, (sätt $C = 0$), vilket betyder att

$$y_p = -x\,e^{-x}.$$

Anmärkning Ekvationen $z'' - 4z' = 4$ blir med variabelbytet $u(x) = z'(x)$ en linjär differentialekvation av ordn. 1:

$$u' - 4u = 4, \quad \text{I.F. } e^{-4x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(ue^{-4x}\right) = 4e^{-4x}$$

Extra: $i\,\omega$-metoden, en ansats då $h(x)$ är en sinussvängning

$i\,\omega$-metoden är en sorts "transform-metod" för att bestämma partikulärlösningar till linjära differentialekvationer med konstanta koefficenter då högerledet är en sinussvängning $y = A\sin(\omega t + \phi)$.

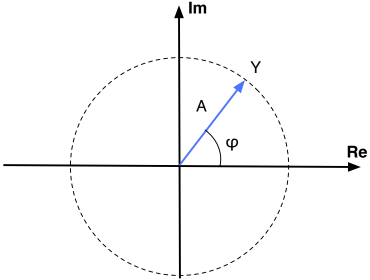
Metoden bygger på det faktum att sinussvängningar kan representeras med hjälp av *visare*, dvs komplexa tal på polär form.

Definition av begreppet visare

Det komplexa talet

$$Y = A\,e^{i\,\phi}$$

benämns *visare* (eng. phasor.)



Visaren representerar en sinussvängning $y = A \sin(\omega t + \phi)$.

Förklaring

$$y = A\sin(\omega t + \phi) = Im\Big(A\big(\cos(\omega t + \phi) + i\,\sin(\omega t + \phi)\big)\Big) =$$

$$= Im\Big(A\,e^{i(\omega t + \phi)}\Big) = Im\Big(A\,e^{i\,\omega t}\,e^{i\,\phi}\Big), \quad \text{så att}$$

$$y = Im\Big(Y\,e^{i\,\omega t}\Big), \quad \text{där } Y = A\,e^{i\phi} \tag{5}$$

Derivering

Om vi deriverar (5), får vi

$$\frac{dy(t)}{dt} = Im\left(i\,\omega Y\,e^{i\,\omega t}\right)$$

Vi konstaterar:

En derivering ger upphov till faktorn $i\,\omega$.

Exempel

- Sinussvängningen $u(t) = U_0 \sin(\omega t + 0.2\pi)$ representeras av visaren $U = U_0\, e^{i\,0.2\pi}$.
- Visaren

$$U = -3 + i\,4 = 5(\cos 2.21 + i \sin 2.21)$$

representerar sinusssvängningen

$$u(t) = Im\big\{5(\cos 2.21 + i \sin 2.21) \cdot (\cos \omega t + i \sin \omega t)\big\} = \\ = 5 \sin(\omega t + 2.21).$$

Sammanfattning

Visare är ett bekvämt sätt att representera sinussvängningar. I det praktiska räknandet behöver vi inte "dras med" $Im-$symbolen.

Vi utför ju operationerna innanför $Im-$symbolen, där inte heller deriveringar utgör något problem.

Vi kan alltså helt och fullt räkna med visarrepresentationen, under beaktande att det hela tiden är imaginärdelen som underförstås.

Tabell

TIDSSIDAN	VISARSIDAN
$A\sin\omega t + B\cos\omega t$	$A + i\,B$
$C\,\sin(\omega t + \phi)$	$C\,e^{i\,\phi}$
$\sin\omega t$	1
$\cos\omega t = \sin(\omega t + \pi/2)$	i
$Im(Ue^{i\,\phi})$	U
$c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$	$c_1 U_1 + c_2 U_2$
$\frac{d}{dt}u(t)$	$i\,\omega U$
$\int u(t)\,dt$	$\frac{1}{i\,\omega}U$

Exempel

Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen

$$y'' + 2y' + 5y = \sin 2t.$$

Lösningsförslag

Drivfunktion är $\sin 2t$. Vi ansätter en partikulärlösning i form av en sinussvängning. $i\,\omega-$metoden ger

TIDSSIDAN	VISARSIDAN
$y_p(t)$	Y_p
$y_p'' + 2y_p' + 5y_p$	$(i\,2)^2\,Y_p + 2(i\,2)\,Y_p + 5\,Y_p$
$\sin 2t$	1

Vi får

$$-4Y_p + i\,4Y_p + 5Y_p = 1,$$

som efter division ger

$$Y_p = \frac{1 - i\,4}{17}.$$

$y_p(t)$ fås nu genom att ta imaginärdelen av produkten mellan visaren Y_p och $e^{i\,\omega t}$.

$$y_p(t) = \frac{1}{17}(\sin 2t - 4\cos 2t)$$

är den sökta partikulärlösningen.

Extraövning

Lös

$$y'' + 3y' + 2y = 3\cos x$$

med $i\omega$-metoden. Svaret vet du förmodligen redan.