Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 17

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

16 februari 2016

Lekt 16

Bestäm Taylorpolynomet av ordning 3 av $f(x) = e^{-2x}$ kring $x = -2$.

$$P_3(x) = f(-2) + f'(-2)(x+2) + \frac{f''(-2)}{2!}(x+2)^2 + \frac{f^{(3)}(-2)}{3!}(x+2)^3$$

Svar: $e^4 - 2\,e^4\,(x+2) + 2\,e^4\,(x+2)^2 - \frac{4\,e^4\,(x+2)^3}{3}$

Maclaurinutveckling

I denna lektion ska vi fokusera kring Taylorutvecklingar omkring $x = 0$, dvs. Maclaurinutvecklingar.

Med Maclaurinserien som fundament, skall vi nu ge oss i kast med att approximera en funktion $f(x)$ med ett Maclaurinpolynom $P_n(x)$, som är en delsumma till tillhörande Maclaurinserie.

Resonemanget är analogt med motsvarande för Taylorutvecklingar.

Definition

Antag att funktionen f har $n+1$ kontinuerliga derivator "nära" $x=0$. *Maclaurinpolynomet av ordning n* *för f definieras som*

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Motsvarande *Maclaurinutveckling* *av f av ordning n är*

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x), \quad \text{där } R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,x^{n+1},$$

för något c mellan 0 och x.

Vi begår naturligtvis ett fel när vi hugger av en oändlig serie. Felet är en funktion av x, $R_{n+1}(x)$, med $R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x)$.

Anmärkning

- R_{n+1} *kallas Lagranges restterm.*
- *Vid numeriska beräkningar måste man arbeta med resttermen på exakt form.*
- *Vid exempelvis gränsvärdeskalkyl nöjer man sig med en grövre uppskattning av resttermen: Resttermen kan skrivas* $R_{n+1}(x) = B(x)x^{n+1}$, *där* B *är en begränsad funktion "nära"* $x = 0$. *På s.k. Ordo-form skrivs resttermen*

$$R_{n+1}(x) = \mathbb{O}(x^{n+1}) \quad \textit{(Stort) ordo av } x^{n+1}$$

$R_{n+1}(x) = \mathbb{O}(x^{n+1})$ *betyder grovt att* R_{n+1} *är mindre än (uppför sig som)* x^{n+1} *för* x *"nära" noll.*

Tabellsamling

- På Fronter finns en tabellsamling som man måste använda när man arbetar med Maclaurinutvecklingar.
- Tabellsamlingen är godkänt hjälpmedel vid tentamen.
- Ladda ner den snarast möjligt och gör dig bekant med dess innehåll.

LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

Tabellsamling, M0039M

LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

INSTITUTIONEN FÖR TEKNIKVETENSKAP OCH MATEMATIK

Tillåtet hjälpmedel på tentamen i M0039M

Tillämpningar

Exempel

Beräkna med hjälp av Tabell eller Sats 8.3 s. 360

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$(b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{\sin x - x} \quad (\textit{Övning})$$

Lösningsförslag, (a)

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathbb{O}(x^3) - 1 - x}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \mathbb{O}(x) \to \frac{1}{2} \quad \text{då} \quad x \to 0.$$

Svar uppgift (b): 2

Knepigare exempel

Låt $f(x) = e^{3x} - \tan 2x - x - 1$.

- Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 2.
- Bestäm
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}$$

Lösningsförslag

Funktion	Funkt.värde
$f = e^{3x} - \tan(2x) - x - 1$	$f(0) = 0$
$f' = 3e^{3x} - 3 - 2 \cdot \tan(2x)^2$	$f'(0) = 0$
$f'' = 9 \cdot e^{3x} - 4\tan(2x) \cdot (2 + 2\tan(2x)^2)$	$f''(0) = 9$

Maclaurinpolynomet av grad 2, $P_2(x)$:

$$f(x) \approx P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 =$$

$$= \frac{9}{2}x^2. \quad \text{(Alt. Nyttja tabell för } e^{3x} \text{ och } \tan(2x) \text{ plus lite kalkyler...)}$$

Gränsvärdesbestämning:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{9}{2}x^2 + \mathbb{O}(x^3)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{9}{2} + \mathbb{O}(x) \to \frac{9}{2} \quad \text{då } x \to 0.$$

Avslutande exempel

Bestäm de tre första nollskilda termerna i Maclaurinserien till $f(x) = \cos^2 x$.

Tips: Nyttja omskrivningen $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$.

Lösningsförslag

$$
\begin{array}{c|c}
f(x) = \dfrac{1+\cos 2x}{2} & f(0) = 1 \\
f'(x) = -\sin 2x & f'(0) = 0 \\
f''(x) = -2\cos 2x & f''(0) = -2 \\
f^{(3)}(x) = 4\sin 2x & f^{(3)}(0) = 0 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

Maclaurinserien för $f(x) = \cos^2 x$ är

$1 - x^2 + \dfrac{x^4}{3} + \dots$ (Alt. Nyttja tabell för $\cos x$ plus lite kalkyler...)

Extra: Funktionsvärdesbestämningar

Vi kan approximera ett funktionsvärde med godtycklig noggrannhet – bara vi tar med tillräckligt många termer.

Exempel

Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 4 som approximerar

$$f(x) = e^{-x^2}$$

runt $x = 0$*. Bestäm därefter ett approximativt värde på* $f(0.3)$*.*
Beräkna slutligen felet $R_5(0.3) = f(0.3) - P_4(0.3)$*.*

Lösningsförslag

Funktion	Funkt.värde
$f = e^{-x^2}$	$f(0) = 1$
$f' = (-2x)e^{-x^2}$	$f'(0) = 0$
$f'' = (-2 + 4x^2)e^{-x^2}$	$f''(0) = -2$
$f^{(3)} = (12x - 8x^3)e^{-x^2}$	$f^{(3)}(0) = 0$
$f^{(4)} = (12 - 48x^2 + 16x^4)e^{-x^2}$	$f^{(4)}(0) = 12$
$f^{(5)} = (-32x^5 + 160x^3 - 120x)e^{-x^2}$	$f^{(5)}(0) = 0$

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

$f(0.3) \approx 0.91393$, $\quad P_4(0.3) \approx 0.91405$, $\quad R_5(0.3) \approx 1.2 \cdot 10^{-4}$ $\quad$ (Hyfsat. . .)

Maclaurinpolynomet av grad 4, $P_4(x)$(blå graf):

$$f(x) \approx P_4(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4.$$